

Statistik-Klausur vom 28. September 2005

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1

Die Altersverteilung in einer Kleinstadt mit 32900 Einwohnern sieht wie folgt aus:

Alter in Jahren	Einwohner	
	weiblich	männlich
0 bis 11	1 400	1 500
über 11 bis 18	2 900	3 100
über 18 bis 25	4 400	4 600
über 25	8 000	7 000

Der Raucher-Anteil nach Geschlecht getrennt beträgt in den verschiedenen Altersklassen:

Alter in Jahren	Raucher	
	weiblich	männlich
über 11 bis 18	12 %	14 %
über 18 bis 25	37 %	36 %
über 25	28 %	33 %

- Wie viel Prozent der über 11-jährigen weiblichen Einwohner rauchen?
- Wie viel Prozent der über 11-jährigen Einwohner rauchen?
- Wie viel Prozent der Raucher (über 11 Jahre) sind weiblich?

Aufgabe 2

- Zwei Autos fahren von Freiburg nach Hamburg und zurück die gleiche Strecke. Das erste Auto fährt hin mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 100 km/h und zurück mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h. Das zweite Auto fährt hin und zurück mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von jeweils 90 km/h.

Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit für die gesamte Strecke (hin und zurück) eines jeden Autos. Welches Auto fuhr die gesamte Strecke mit einer höheren Durchschnittsgeschwindigkeit?

- Der Preis für einen Liter Normalbenzin entwickelte sich von Januar bis Juli dieses Jahres wie folgt:

Monat	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli
Preis in € pro Liter	1,067	1,085	1,117	1,164	1,151	1,190	1,197

Quelle: www.benzinpreis.de

Berechnen Sie die durchschnittliche monatliche Preissteigerung für einen Liter Normalbenzin im Zeitraum Januar 2005 bis Juli 2005.

Aufgabe 3

In regelmäßigen Abständen beauftragt ein Unternehmen eine Marktforschungsinstitut, für den Marktanteil seines wichtigsten Produkts ein 0,95%-Konfidenzintervall zu berechnen.

Bei einer Umfrage von 8 500 Personen gaben 2 193 Personen an, das Produkt regelmäßig zu kaufen. Bestimmen Sie aufgrund dieser Stichprobe ein 0,95%-Konfidenzintervall für den Anteil der Personen, die dieses Produkt regelmäßig kaufen. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 4

Bei einer Preiserhebung in sechs Einzelhandelsgeschäften werden für zwei Güter A und B folgende Preise in € pro Stück festgestellt:

Preis für Gut A (€/Stück)	Preis für Gut B (€/Stück)
5,50	22,20
5,50	20,80
6,90	22,90
5,40	20,40
5,20	25,00
6,00	21,00

- Berechnen Sie für jedes Gut den durchschnittlichen Preis aus den einzelnen Preisangaben.
- Bei welchem Gut fallen die Preisschwankungen zwischen den Einzelhandelsgeschäften geringer aus? Beantworten Sie diese Frage durch Berechnung einer geeigneten, aussagekräftigen statistischen Maßzahl und begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe 5

Die Ausgabemenge (in ml) eines Kaffeeautomaten sei normalverteilt. Die mittlere Ausgabemenge sollte 200 ml betragen, weicht hiervon jedoch im Mittel um 10 % nach unten ab. Die theoretische Standardabweichung beträgt 10 ml.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ausgabemenge weniger als 170 ml beträgt?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ausgabemenge zwischen 170 ml und 200 ml liegt?
- Welche Ausgabemenge wird in 97,5% der Fälle nicht überschritten?
- Welche Ausgabemenge wird in 80% der Fälle überschritten?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Ausgabemenge von genau 200 ml zu erhalten?

Aufgabe 6

Der Gesamtumsatz in Mio. € eines Unternehmens seit dem ersten Quartal 2003

lässt sich der folgenden Tabelle entnehmen:

Quartal	2003	2004	2005
I	5	7	8
II	4	5	7
III	4	6	6
IV	4	6	-

- a) Ermitteln Sie die saisonbereinigte Reihe.
 b) Was sagt der Wert der bereinigten Saisonkomponente $\hat{s}_1 = 1,5625$ für das erste Quartal aus?

Lösung zu Aufgabe 1

Alter in Jahren	Raucher		Einwohner	
	weiblich	männlich	weiblich	männlich
über 11 bis 18	348	434	2 900	3 100
über 18 bis 25	1 628	1 656	4 400	4 600
über 25	2 240	2 310	8 000	7 000
Σ	4 216	4 400	15 300	14 700

- a) $\frac{4\,216}{15\,300} = 0,2756 = 28\%$
 d.h. 28 % aller weiblichen Einwohner über 11 Jahre rauchen.
 b) $\frac{4\,216 + 4\,400}{15\,300 + 14\,700} = \frac{8\,616}{30\,000} = 0,2872 = 29\%$
 d.h. 29 % aller Einwohner über 11 Jahre rauchen.
 c) $\frac{4\,216}{4\,216 + 4\,400} = 0,4893 = 49\%$
 d.h. 49 % aller Raucher (über 11 Jahre) sind weiblich.

Lösung zu Aufgabe 2

- a) Die Länge der Strecke ist für die Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkeit unerheblich. Wir nehmen an, dass die einfache Strecke 800 km beträgt. Dann ist das erste Auto auf dem Hinweg acht Stunden und auf dem Rückweg zehn Stunden unterwegs, d. h.:

$$\begin{aligned} \text{Durchschnittsgeschwindigkeit} &= \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeit}} = \frac{1\,600\text{km}}{8\text{h} + 10\text{h}} = \frac{1\,600}{18}\text{km/h} \\ &= 88,8\text{km/h} \end{aligned}$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit des ersten Autos lässt sich auch mit Hilfe der Formel für das harmonische Mittel wie folgt berechnen:

$$\frac{2}{\frac{1}{100} + \frac{1}{80}} = \frac{2}{\frac{9}{400}} = \frac{800}{9} = 88,8$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit für das zweite Auto beträgt 90 km/h. Somit hat das zweite Auto eine höhere Durchschnittsgeschwindigkeit.

- b) Von Januar bis Juli gab es insgesamt sechs Preisveränderungen.

$${}_{7-1}\sqrt{\frac{1,197}{1,067}} = \sqrt[6]{1,1218} = 1,0193$$

d.h. die durchschnittliche monatliche Preissteigerung beträgt 1,93 %.

Lösung zu Aufgabe 3

p = Marktanteil in der Grundgesamtheit

$\hat{p} = \frac{2193}{8500} = 0,2580$ Marktanteil in der Stichprobe

$$0,95\text{-KI für } p = [0,2580 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,2580 \cdot 0,7420}{8500}}] = [0,2580 \pm 0,0093] = [0,2487; 0,2673]$$

d.h. [25 %; 27 %] ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem der Marktanteil der Bevölkerung mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 liegt.

Lösung zu Aufgabe 4

$$\text{a) } \bar{x}_A = \frac{34,5}{6} = 5,75$$

$$\bar{x}_B = \frac{132,3}{6} = 22,05$$

b) Da die einzelnen arithmetischen Mittel weit auseinander liegen, sollte hier der Variationskoeffizient (oder der relative Quartilsabstand) berechnet werden.

Nr. i	Gut A		Gut B	
	x_i	x_i^2	x_i	x_i^2
1	5,50	30,25	22,20	492,84
2	5,50	30,25	20,80	432,64
3	6,90	47,61	22,90	524,41
4	5,40	29,16	20,40	416,16
5	5,20	27,04	25,00	625,00
6	6,00	36,00	21,00	441,00
Σ	34,50	200,31	132,30	2932,05

$$s_A^2 = \frac{1}{6} \cdot \sum x_i^2 - 5,75^2 = \frac{200,31}{6} - 33,0625 = 0,3225$$

$$s_B^2 = \frac{1}{6} \cdot \sum x_i^2 - 22,05^2 = \frac{2932,05}{6} - 486,02025 = 2,4725$$

$$v_A = \frac{s_A}{\bar{x}_A} = \frac{\sqrt{0,3225}}{5,75} = 0,0988$$

$$v_B = \frac{s_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{2,4725}}{22,05} = 0,0713$$

d.h. gemessen mit dem Variationskoeffizienten schwanken die Preise von Gut B weniger als die Preise von Gut A.

Lösung zu Aufgabe 5

X = tatsächliche Ausgabemenge (in ml) für eine Kaffeetasse

$$200 - 10\% \text{ von } 200 = 200 \cdot 0,9 = 180$$

$$X \sim N(\mu = 180; \sigma = 10)$$

$$\text{a) } P(X < 170) = P(X \leq 170) = F_U\left(\frac{170 - 180}{10}\right) = F_U(-1) = 0,159$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,159.

b) $P(X \leq 200) - P(X \leq 170) = F_U\left(\frac{200 - 180}{10}\right) - 0,159 = F_U(2) - 0,159 = 0,977 - 0,159 = 0,818$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,818.

c) $0,975 = P(X \leq x) = F_U\left(\frac{x - 180}{10}\right)$

$$1,96 = \frac{x - 180}{10} \Rightarrow x = 180 + 1,96 \cdot 10 = 199,6$$

d.h. in 97,5 % aller Fälle liegt die Ausgabemenge unter 199,6 ml.

d) $0,20 = P(X \leq x) = F_U\left(\frac{x - 180}{10}\right)$

$$-0,8416 = \frac{x - 180}{10} \Rightarrow x = 180 - 0,8416 \cdot 10 = 171,6$$

d.h. in 80 % aller Fälle liegt die Ausgabemenge über 171,6 ml.

e) $P(X = 200) = 0$; d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt null.

Lösung zu Aufgabe 6

a) s_1, s_2, s_3, s_4 = Saisonphasen
 $y_t - s_t$ = saisonbereinigte Reihe

Arbeitstabelle

Quartal	y_t	4er $\bar{\emptyset}$	x_t	$d_t = y_t - x_t$	\bar{d}_t	$s_t = \bar{d}_t - \bar{d}$	$y_t - s_t$
I	5	4,25	—	—	1,5	1,5625	3,4375
II	4		—	—	-0,75	-0,6875	4,6875
III	4		4,5	-0,5	-0,3125	-0,25	4,25
IV	4		4,75	4,875	-0,875	-0,6875	-0,625
I	7	5	5,25	1,75	1,5	1,5625	5,4375
II	5	5,5	5,75	-0,75	-0,75	-0,6875	5,6875
III	6	6	6,125	-0,125	-0,3125	-0,25	6,25
IV	6	6,25	6,5	-0,5	-0,6875	-0,625	6,625
I	8	6,75	6,75	1,25	1,5	1,5625	6,4375
II	7	6,75	—	—	-0,75	-0,6875	7,6875
III	6		—	—	-0,3125	-0,25	6,25

$$\bar{d} = \frac{1}{4} [\bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_3 + \bar{d}_4] = \frac{1}{4} [1,5 - 0,75 - 0,3125 - 0,6875] = -0,0625$$

b) $s_1 \approx 1,5625$

d.h. in den ersten Quartalen liegt der Gesamtumsatz um etwa 1,6 Mio.€ über dem Trend.