

Statistik-Klausur vom 31.01.2013

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1

In der PISA-Studie erzielten 15-jährige Schüler (w,m) in Deutschland folgende Punkte in den beiden Kompetenzen Mathematik und Naturwissenschaften:

Jahr	Mathematik	Naturwissenschaften
2000	490	487
2003	503	502
2006	504	516
2009	513	520

- a) Wie hoch ist die durchschnittliche jährliche Steigerung (in Prozent) der Punkte der Mathematik-Kompetenz in dem Zeitraum 2000 bis 2009?
- b) 1. Mit welcher Punktzahl in Naturwissenschaften ist gemäß der Methode der kleinsten Quadrate beim nächsten Pisa-Test zu rechnen, wenn die Mathematik-Kompetenz 500 Punkte betragen würde?
2. Ist der unter b) 1. ermittelte Prognosewert als verlässlich anzusehen? (Begründung!)

Aufgabe 2

Ein Reiseveranstalter bietet für eine Flusskreuzfahrt drei unterschiedliche Tickets an. Der Gewinn des Reiseveranstalters hängt unter anderem von der Ticketart ab. Folgende Anteile sind aus Erfahrung bekannt:

- 50% der Gäste sind Frühbucher. Der Gewinn pro Frühbucher beträgt 5 GE.
- 30% der Gäste zahlen den Normalpreis, der einen Gewinn von 10 GE pro verkauften Ticket bringt.
- Der Rest der Gäste erhält ein ermäßigtes Ticket, das einen Gewinn von 2 GE pro verkauften Ticket bringt.

- a) Betrachten Sie die Zufallsvariable X = „Gewinn (in GE) pro Ticket“.
1. Berechnen Sie den erwarteten Gewinn pro Ticket.
 2. Berechnen Sie die Varianz von X .
- b) Wie hoch ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass bei 400 Gästen der Gesamtgewinn über 2 400 GE liegt?
- c) Welcher Gewinn wird näherungsweise bei 400 Gästen mit der Wahrscheinlichkeit von 95% überschritten?

Aufgabe 3

Ein Automobilhersteller produziert Autos für den deutschen Markt. Bei jedem Auto werden zwei Qualitätskontrollen durchgeführt: eine Sicherheitskontrolle (an Getriebe, Bremsen usw.) und eine Verarbeitungskontrolle (an Lackierung, Verarbeitung der Innenausstattung usw.). Fünf Prozent der geprüften Autos bestehen die Sicherheitskontrolle nicht, 15 Prozent bestehen die Verarbeitungskontrolle nicht, drei Prozent fallen bei beiden Kontrollen durch.

- a) Ein Auto ist Ausschuss, falls es bei mindestens einer der Kontrollen durchfällt. Wie viel Prozent der Autos sind Ausschuss?
- b) Sind die zwei Arten von Qualitätsmängeln (also bei den beiden Kontrollen durchzufallen) stochastisch unabhängig?
- c) Ein Auto besteht die Verarbeitungskontrolle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es auch die Sicherheitskontrolle besteht?
- d) Das Unternehmen überlegt, Autos, die die Sicherheitskontrolle bestehen, aber Verarbeitungsmängel haben, nicht mehr als Ausschuss zu entsorgen, sondern als „B-Ware“ in Schwellenländer zu exportieren.
 1. Wie viel Prozent der gesamten Produktion würden dann exportiert?
 2. Wie viel Prozent der sicheren Autos würden exportiert?
- e) Wie ändert sich Ihr Ergebnis in Teil a), wenn kein Auto gleichzeitig durch beide Kontrollen fallen kann?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) ${}^{2009-2000}\sqrt[9]{\frac{513}{490}} = \sqrt[9]{1,046939} = 1,005110$

d.h. die durchschnittliche jährliche Steigerung betrug 0,5% pro Jahr.

- b) X =Punkte in Mathematik
 Y =Punkte in Naturwissenschaften

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
1	490	487			
2	503	502			
3	504	516			
$n = 4$	513	520			
\sum	2 010	2 025	1 017 960	1 010 294	1 025 829

1. $b_1 = \frac{4 \cdot 1\,017\,960 - 2\,010 \cdot 2\,025}{4 \cdot 1\,010\,294 - 2\,010^2} = \frac{1\,590}{1\,076} = 1,477695$

$$a_1 = \frac{2\,025 - b_1 \cdot 2\,010}{4} = -236,291822$$

$$a_1 + b_1 \cdot 500 = 502,5558 \approx 503$$

d.h. es ist mit etwa 503 Punkten in der Naturwissenschaften-Kompetenz zu rechnen.

2. Der Prognosewert 503 ist ein interpolierter Wert, da $500 \in [490; 513]$ liegt.

$$b_2 = \frac{1590}{4 \cdot 1025829 - 2025^2} = \frac{1590}{2691} = 0,59085841$$

$$r = \sqrt{b_1 \cdot b_2} = 0,9344028$$

d.h. bei der Prognose handelt es sich um einen interpolierten Wert bei gleichzeitig starker Korrelation, insofern ist der Prognosewert 503 als zuverlässig anzusehen.

Lösung zu Aufgabe 2:

X =Gewinn (in GE pro Ticket)

x	2	5	10
$P(X = x)$	0,2	0,5	0,3

a) 1. $E[X] = 2 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,3 = 5,9$

2. $V[X] = (2 - 5,9)^2 \cdot 0,2 + (5 - 5,9)^2 \cdot 0,5 + (10 - 5,9)^2 \cdot 0,3 = 8,49$

b) Faustregel für ZGWS: $n = 400 \geq 30$ ist erfüllt

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_{400} > 2400) = 1 - P(X_1 + X_2 + \dots + X_{400} \leq 2400) \approx$$

$$1 - F_U\left(\frac{2400 - 400 \cdot 5,9}{\sqrt{400 \cdot 8,49}}\right) = 1 - F_U(0,6864) = 1 - 0,754 = 0,246$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 25%.

c) $0,05 = P(X_1 + X_2 + \dots + X_{400} \leq x) = F_U\left(\frac{x - 400 \cdot 5,9}{\sqrt{400 \cdot 8,49}}\right)$

$$\Leftrightarrow -1,6449 = \frac{x - 400 \cdot 5,9}{\sqrt{400 \cdot 8,49}} \Leftrightarrow x = 400 \cdot 5,9 - 1,6449 \cdot \sqrt{400 \cdot 8,49} = 2264,143$$

d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt der Gewinn über etwa 2264 GE.

Lösung zu Aufgabe 3:

S = zufällig ausgewähltes Auto besteht Sicherheitskontrolle

V = zufällig ausgewähltes Auto besteht Verarbeitungskontrolle

Gegeben sind folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(\bar{S}) = 0,05, P(\bar{V}) = 0,15, P(\bar{S} \cap \bar{V}) = 0,03.$$

Damit lässt sich die Arbeitstabelle ausfüllen:

	S	\bar{S}	
V	0,83	0,02	0,85
\bar{V}	0,12	0,03	0,15
	0,95	0,05	1

a) $P(\bar{S} \cup \bar{V}) = 1 - P(S \cap V) = 1 - 0,83 = 0,17$

d.h. 17 Prozent der produzierten Autos sind Ausschuss.

b) Da $P(\bar{S}) \cdot P(\bar{V}) = 0,05 \cdot 0,15 = 0,0075 \neq 0,03 = P(\bar{S} \cap \bar{V})$ ist, sind \bar{S}, \bar{V} nicht stochastisch unabhängig.

c) $P(S|V) = \frac{P(S \cap V)}{P(V)} = \frac{0,83}{0,85} = 0,9765$

d.h. ein Auto, das die Verarbeitungskontrolle bestanden hat, besteht mit Wahrscheinlichkeit 97,65 Prozent die Sicherheitskontrolle.

d) 1. $P(S \cap \bar{V}) = 0,12$
d.h. 12 Prozent der gesamten Produktion würden exportiert.

2. $P(\bar{V}|S) = \frac{P(\bar{V} \cap S)}{P(S)} = \frac{0,12}{0,95} = 0,1263$

d.h. 12,63 Prozent der sicheren Autos würden exportiert.

e) Arbeitstabelle:

	S	\bar{S}	
V	0,80	0,05	0,85
\bar{V}	0,15	0	0,15
	0,95	0,05	1

$$P(\bar{S} \cup \bar{V}) = 1 - P(S \cap V) = 1 - 0,80 = 0,20$$

d.h. 20 Prozent der produzierten Autos wären Ausschuss.