

Statistik-Klausur vom 5. Oktober 2004

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1

Das Prüfungsamt einer Hochschule veröffentlichte die Ergebnisse zweier Diplomprüfungen:

Note (verbal und als Ziffer)	Erste Dipolm- prüfung (Anzahl)	Zweite Diplom- prüfung (Anzahl)	
Sehr gut (1)	10	55	
Gut (2)	20	35	
Befriedigend (3)	30	15	
Ausreichend (4)	25	40	
Nicht bestanden (5)	15	55	
Zusammen	100	200	

- Bei welcher der beiden Diplomprüfungen war das Notenniveau besser? Begründen Sie Ihre Antwort durch Berechnung und Interpretation einer geeigneten statistischen Maßzahl!
- Bei welcher der beiden Diplomprüfungen waren die Notenunterschiede größer? Begründen Sie Ihre Antwort durch Berechnung und Interpretation einer geeigneten statistischen Maßzahl!

Aufgabe 2

Nachfolgend finden Sie eine Tabelle über Arbeiterverdienste in der Industrie in Deutschland von 1950 bis 2001 (Quelle: Institut der deutschen Wirtschaft Köln, Deutschland in Zahlen 2002, Tabelle 6.3, Seite 56, Köln 2002).

Jahr	Durchschnittlicher Bruttolohn				Reallohn-	
	Männer	Frauen	Insgesamt	Veränderung	Index	Index ²
	in Euro			in Prozent ³	Okt. 1995 = 100	
West						
1950 ⁴	0,73	0,44	0,66	.	5,2	20,0
1960 ⁴	1,48	0,96	1,37	7,6	10,9	34,8
1970	3,33	2,29	3,12	8,6	24,6	60,8
1980	7,24	5,24	6,86	8,2	52,7	79,4
1990	10,82	7,92	10,33	4,2	78,3	91,4
1991	11,48	8,45	10,97	6,1	83,0	93,4
1992	12,12	8,95	11,60	5,7	87,5	94,7
1993	12,74	9,45	12,24	5,5	91,8	95,9
1994	13,11	9,73	12,61	3,1	94,8	96,4
1995	13,60	10,09	13,07	3,7	98,5	98,6
1996	14,01 ⁵	10,46 ⁵	13,49 ⁵	3,2 ⁶	101,8	100,6
1997	14,18	10,63	13,67	1,3	103,1	100,0
1998	14,47	10,88	13,96	2,1	104,9	100,9
1999	14,82	11,22	14,31	2,5	107,4	102,6
2000	15,13 ⁵	11,47 ⁵	14,64 ⁵	2,6 ⁶	110,2	103,2
2001 ⁴	15,36	11,64	14,86	1,5	112,1	102,6
Ost						
1991	5,52	4,36	5,34	.	.	.
1992	7,07	5,49	6,86	28,3	.	.
1993	8,19	6,22	7,96	16,1	.	.
1994	8,92	6,86	8,67	8,9	.	.
1995	9,59	7,42	9,32	7,6	.	.
1996	9,94 ⁵	7,81 ⁵	9,67 ⁵	7,6 ⁶	101,7	100,3
1997	10,16	8,00	9,88	2,1	104,6	100,9
1998	10,34	8,22	10,05	1,7	106,8	101,9
1999	10,57	8,47	10,27	2,2	109,4	104,0
2000	10,50 ⁵	8,18 ⁵	10,15 ⁵	2,1 ⁶	112,6	105,3
2001 ⁴	10,71	8,37	10,33	1,8	115,4	104,9
D						
1996	13,57	10,21	13,08	.	101,8	100,5
1997	13,78	10,39	13,30	1,6	103,3	100,1
1998	14,08	10,63	13,59	2,2	105,1	100,9
1999	14,43	10,97	13,94	2,6	107,6	102,7
2000	14,46 ⁵	10,95 ⁵	13,98 ⁵	2,9 ⁶	110,4	103,4
2001 ⁴	14,73	11,11	14,23	1,8	112,3	102,6

a) Um wie viel Prozent ist der durchschnittliche Bruttostundenlohn der westdeutschen Industriearbeitskräfte im Zeitraum von 1950 bis 2001 durchschnittlich pro Jahr gestiegen?

b) Um wie viel Prozent ist der Reallohn der westdeutschen Industriearbeitskräfte

im Zeitraum von 1950 bis 2001 durchschnittlich pro Jahr gestiegen?

- c) Von welcher Inflationsrate wurden die westdeutschen Industriearbeitskräfte im Zeitraum von 1950 bis 2001 im Durchschnitt pro Jahr betroffen?

Aufgabe 3

Einkommen und Ausgaben für Nahrungs- und Genussmittel in Deutschland 1995

Einkommen (1)	Ausgaben für Nahrungs- und Genussmittel (2)	Anteil von (2) an (1) (3)
DM/Monat		%
2 659	539	20,3
2 759	534	19,4
4 349	824	19,0
5 349	894	16,7
5 794	931	16,1
8 615	1 149	13,3

Quelle: StB (Hrsg.): Datenreport 1997, S. 108 und S. 113

Analysieren Sie die Art des Zusammenhangs zwischen Einkommen und Ausgaben für Nahrungs- und Genussmittel! (Hinweis zur Form der Lösung: Die Form der Lösung ist Ihnen freigestellt: entweder Berechnungen mit Interpretationen oder rein verbale Analyse.)

Aufgabe 4

Das Gesetzgebungswerk des Deutschen Bundestages in den letzten fünf bereits abgeschlossenen Legislaturperioden hat folgenden quantitativen Umfang:

Wahl- periode	Beschlossene Gesetze	
1983 bis 1987	320	
1987 bis 1990 ¹⁾	369	
1990 bis 1994	507	
1994 bis 1998	566	
1998 bis 2002	559	

1) Verkürzte Legislaturperiode wegen des Beitritts der DDR zum Geltungsbereich des Grundgesetzes

Quelle: Erich Schmidt Verlag: Zahlenbilder; Nr. 66 205; September 2003

- a) Mit wie vielen neu beschlossenen Gesetzen ist nach Abschluss der Wahlperiode 2002 bis 2006 zu rechnen (vorausgesetzt, der Bundestag wird nicht vor Ende der laufenden Legislaturperiode aufgelöst und es finden vorgezogene Neuwahlen statt)?

Begründen Sie Ihre Antwort durch die Interpretation geeigneter statistischer Berechnungen!

- b) Für wie zuverlässig halten Sie Ihre Prognose unter a)?

Begründen Sie bitte Ihre Antwort (verbal und/oder rechnerisch)!

Aufgabe 5

Einem Unternehmen stehen für eine Investitionsentscheidung zwei Alternativen A und B zur Auswahl. Der Abteilung für Investitionsrechnung liegen die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Renditen der Anlagealternativen A und B vor; die Investitionsplaner und -rechner gehen davon aus, dass die Renditen der beiden Anlagealternativen stochastisch unabhängig voneinander sind.

Die Renditechancen werden für das Kalenderjahr 2005 zur Zeit wie folgt eingeschätzt:

Höhe der Rendite (in % für Jahr 2005)	Wahrscheinlichkeit dafür, dass die jeweilige Rendite realisiert wird (in %)		
	Alternative A	Alternative B	
0	30	25	
1	40	45	
2	20	15	
3	10	15	
Zusammen	100	100	

- a) Berechnen Sie für das Kalenderjahr 2005 die erwartete Rendite jeweils getrennt für Anlagealternative A und für Anlagealternative B!
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Renditen sowohl der Anlagealternative A als auch der Anlagealternative B im Kalenderjahr 2005 null sind!
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine der beiden Anlagealternativen im Kalenderjahr 2005 eine positive Rendite bringt!
- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Renditen sowohl der Anlagealternative A als auch der Anlagealternative B im Kalenderjahr 2005 mindestens 2% betragen!

Aufgabe 6

Ein Unternehmen produziert und vertreibt ein Gut in vier Varianten (Typ A, Typ B, Typ C und Typ D).

Auf Typ A entfallen 40%, auf Typ b 20% und auf Typ C 15% der Produktions-(bzw.

Absatz-)menge. Der Rest entfällt auf Typ D.

Bei Typ A werden 5% der abgesetzten Produktionsstücke reklamiert, und zwar wegen mangelnder Qualität. Bei Typ B beträgt die Reklamationsrate wegen mangelnder Qualität 2%, bei Typ C 3% und bei Typ D 3,5%.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig aus der Gesamtproduktion ausgewähltes Produktionsstück reklamiert wird!
- b) Ein Produktionsstück wird wegen mangelnder Qualität zum Unternehmen zurückgeschickt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um ein Produktionsstück vom Typ B?

Aufgabe 7

Die Marktforschungsabteilung eines großen Kaufhauskonzerns hat 150 zufällig ausgewählte Kundinnen des Hauses befragen lassen, wie viel Geld sie pro Monat durchschnittlich für Kosmetika ausgeben.

Im Durchschnitt waren das bei den 150 Kundinnen 46,30 Euro pro Monat mit einer Streuung (gemessen durch die Standardabweichung) von 13,00 Euro.

Innerhalb welchen Bereichs vermuten Sie mit einer Sicherheit (Wahrscheinlichkeit) von annähernd 95% die mittleren monatlichen Ausgaben für Kosmetika aller Kundinnen des Kaufhauskonzerns?

(Hinweis: Zu einer vollständigen Lösung gehört in jedem Falle eine verbale Interpretation der Rechenergebnisse; d. h. ein vollständiger Antwortsatz mit Subjekt, Prädikat und Objekt!)

Lösung zu Aufgabe 1

X = Note der ersten Diplomprüfung

Y = Note der zweiten Diplomprüfung

Note	X		Y	
	rel. Häufigk.	kum. Häufigk.	rel. Häufigk.	kum. Häufigk.
1	0,10	0,10	0,275	0,275
2	0,20	0,30	0,175	0,450
3	0,30	0,60	0,075	0,525
4	0,25	0,85	0,200	0,725
5	0,15	1,00	0,275	1,000

Bei einer Noten handelt es sich um ein ordinales Merkmal.

- a) 50%-Punkt

$$x_{0,50} \approx 3 \text{ und } y_{0,50} \approx 3$$

d.h. gemessen am Median war das Notenniveau bei beiden Prüfungen etwa gleich.

- b) Quartilsabstand

$$x_{0,75} \approx 4 \text{ und } x_{0,25} \approx 2 \Rightarrow x_{0,75} - x_{0,25} \approx 4 - 2 = 2$$

$$y_{0,75} \approx 5 \text{ und } y_{0,25} \approx 1 \Rightarrow y_{0,75} - y_{0,25} \approx 5 - 1 = 4$$

d.h. die gemessen am Quartilsabstand waren die Notenunterschiede bei der zweiten Prüfung größer als bei der ersten Prüfung.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Wertindex

$${}^{2001-1950}\sqrt{\frac{14,86}{0,66}} = {}^{51}\sqrt{22,5152} = 1,0630$$

d.h. im Zeitraum von 1950 bis 1951 ist der Bruttostundenlohn der Industriearbeitskräfte um durchschnittlich 6,3% pro Jahr gestiegen.

b) Mengenindex

$${}^{2001-1950}\sqrt{\frac{102,6}{20,0}} = {}^{51}\sqrt{5,13} = 1,0326$$

d.h. im Zeitraum von 1950 bis 1951 ist der Reallohn der Industriearbeitskräfte um durchschnittlich etwa 3,3% pro Jahr gestiegen.

c) Preisindex = $\frac{\text{Wertindex}}{\text{Mengenindex}}$

$$P = \frac{1,0630}{1,0326} = 1,029$$

d.h. im Zeitraum von 1950 bis 1951 betrug die durchschnittliche jährliche Inflationsrate der Industriearbeitskräfte etwa +2,9%.

Lösung zu Aufgabe 3

Art des Zusammenhangs: Je höher das monatliche Einkommen desto größer sind die monatlichen Ausgaben für Nahrungs- und Genussmittel.

d.h. es liegt ein positiver linearer Zusammenhang zwischen Einkommen und Ausgaben vor.

Stärke des Zusammenhangs: Korrelationskoeffizient oder Bestimmtheitsmaß

X = Einkommen (in DM pro Monat)

Y = Ausgaben (in DM pro Monat) für Nahrungs- und Genussmittel

$n = 6$ Datenpaare

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	2 659	539			
2	2 759	534			
3	4 349	824			
4	5 349	894			
5	5 794	931			
6	8 615	1 149			
Σ	29 525	4 871	169 996 625	4 240 851	26 564 938

$$r_{xy} = \frac{6 \cdot 26\,564\,938 - 29\,525 \cdot 4\,871}{\sqrt{6 \cdot 169\,996\,625 - 29\,525^2} \cdot \sqrt{6 \cdot 4\,240\,851 - 4\,871^2}} = \frac{15\,573\,353}{\sqrt{148\,254\,125} \cdot \sqrt{1\,718\,465}} = 0,9757$$

d.h. es liegt ein starker positiver linearer Zusammenhang zwischen Einkommen und Ausgaben vor.

Lösung zu Aufgabe 4

Lineare Regression

X = Zeitpunkte

Y = Anzahl der beschlossenen Gesetze

$n = 5$ Datenpaare

Da die Wahlperioden Zeitspannen sind, nehmen wir als Zeitpunkte x_i die Mitte der jeweiligen Zeitspannen.

Zeitspanne	Mitte	Zeitpunkt
1983-1987	1985	1
1987-1990	1988,5	4,5
1990-1994	1992	8
1994-1998	1996	12
1998-2002	2000	16
2002-2006	2004	20

$$\text{Mitte} = \frac{\text{Untergrenze} + \text{Obergrenze}}{2} = \frac{1083 + 1987}{2} = 1985 \text{ usw.}$$

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	1	320			
2	4,5	369			
3	8	507			
4	12	566			
5	16	559			
\sum	41,5	2321	485,25	1 128 447	21 772,5

a) Gesucht $f(20) = a_1 + b_1 \cdot 20$

$$b_1 = \frac{5 \cdot 21\,772,5 - 41,5 \cdot 2\,321}{5 \cdot 485,25 - 41,5^2} = \frac{12\,541}{704} = 17,81392$$

$$a_1 = \frac{2\,321 - 17,81392 \cdot 41,5}{5} = 316,34446$$

$$f(20) = 316,34446 + 20 \cdot 17,81392 = 672,6299 \approx 673$$

d.h. gemäß der Methode der kleinsten Quadrate ist in der Wahlperiode 2002 bis 2006 mit etwa 673 beschlossenen Gesetzen zu rechnen.

b) Bestimmtheitsmaß oder Korrelationskoeffizient

$$b_2 = \frac{12\,541}{5 \cdot 1\,128\,447 - 2\,321^2} = \frac{12\,541}{255\,194} = 0,049143$$

$$B = b_1 \cdot b_2 = 17,81392 \cdot 0,049143 = 0,8754296$$

$$r_{xy} = +\sqrt{0,8754296} = 0,935644$$

d.h. es liegt ein starker positiver linearer Zusammenhang vor.

d.h. rein rechnerisch ist die Berechnung unter a) korrekt und zuverlässig. Ob jedoch in der Wahlperiode 2002 bis 2006 wirklich etwa 673 Gesetze verabschiedet werden, ist erst nach Ende der Wahlperiode festzustellen.

Lösung zu Aufgabe 5

X = Rendite von Anlagealternative A

Y = Rendite von Anlagealternative B

a) $E[X] = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 = 1,1$

d.h. die erwartete Rendite von Anlagealternative A beträgt 1,1%.

$E[Y] = 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,45 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,15 = 1,2$

d.h. die erwartete Rendite von Anlagealternative A beträgt 1,2%.

b) $P(X = 0 \cap Y = 0) = P(X = 0) \cdot P(Y = 0) = 0,3 \cdot 0,25 = 0,075$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,075.

c) $P(X > 0 \cup Y > 0) = P(X > 0) + P(Y > 0) - P(X > 0 \cap Y > 0)$

$= 0,7 + 0,75 - P(X > 0) \cdot P(Y > 0)$

$= 1,45 - 0,7 \cdot 0,75$

$= 0,925$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,925.

oder $P(X > 0 \cup Y > 0) = 1 - P(X = 0 \cap Y = 0) = 1 - 0,075 = 0,925$

oder $P(X + Y \geq 1) = 1 - P(X + Y < 1) = 1 - P(X + Y = 0) = 1 - 0,075 = 0,925$

d) $P(X \geq 2 \cap Y \geq 2) = P(X \geq 2) \cdot P(Y \geq 2) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,09.

Lösung zu Aufgabe 6

A=zufällig ausgewähltes Produktionsstück ist vom Typ A

B=zufällig ausgewähltes Produktionsstück ist vom Typ B

C=zufällig ausgewähltes Produktionsstück ist vom Typ C

D=zufällig ausgewähltes Produktionsstück ist vom Typ D

R=zufällig ausgewähltes Produktionsstück wird reklamiert

Gegeben sind folgende Wahrscheinlichkeiten:

$0,40 = P(A) \quad P(R|A) = 0,05$

$0,20 = P(B) \quad P(R|B) = 0,02$

$0,15 = P(C) \quad P(R|C) = 0,03$

$1 - 0,75 = 0,25 = P(D) \quad P(R|D) = 0,035$

Arbeitstabelle:

	A	B	C	D	
R	0,02000	0,00400	0,00450	0,00875	0,03725
\bar{R}					
	0,40	0,20	0,15	0,25	1

$P(R \cap A) = 0,05 \cdot 0,40 = 0,02$

$P(R \cap B) = 0,02 \cdot 0,20 = 0,004$

$P(R \cap C) = 0,03 \cdot 0,15 = 0,0045$

$P(R \cap D) = 0,035 \cdot 0,25 = 0,00875$

a) $P(R) = 0,03725$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,03725.

b) $P(B|R) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{0,00400}{0,03725} = 0,1074$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,1074.

Lösung zu Aufgabe 7

X =Ausgaben (in €) einer Kundin für Kosmetika

$n = 150 \geq 30$ Faustregel erfüllt

$\bar{x} = 46,30$ arithmetisches Mittel der Stichprobe

$s = 13$ emp. Standardabweichung der Stichprobe

μ = mittlere Ausgaben (in €) einer Kundin für Kosmetika

0,95-KI für $\mu = [46,30 \pm 1,96 \cdot \frac{13}{\sqrt{150}}] =$

$[46,30 \pm 2,0804] = [44,2196 : 48,3804]$

d.h. [44;48] ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem die mittleren Ausgaben für Kosmetika einer Kundin mit der Wahrscheinlichkeit 0,95 liegen.