Mathematik-Klausur am 16.7.2002

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie
$$\lim_{x\to-5}\frac{x^2+4x-5}{7x+35}$$

b) Gegeben sei die Matrix
$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1}.

2) Lösen Sie das Gleichungssystem:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2

a) Ein mittelständiges Unternehmen stellt die Produkte P_1 und P_2 her. Der Verkaufspreis für je ein Stück des Produkts P_1 beträgt 110 Geldeinheiten (GE), der für je ein Stück von P_2 50 GE. Die Herstellungszeit von P_1 beträgt 16 Stunden pro Stück, die von P_2 vier Stunden pro Stück. Die Produktion soll innerhalb von 320 Stunden abgewickelt werden. Die gesamte Lagerkapazität des Unternehmens ist auf 50 Stück beschränkt. Gesucht ist ein Produktionsprogramm mit maximalen Umsatz. Formulieren Sie das zugehörige Optimierungsproblem. (**Keine Berechnung!**)

b) Bestimmen Sie grafisch oder rechnerisch die Lösung des folgenden Optimierungsproblems:

$$Z=150x_1+100x_2\overset{!}{=}\text{ maximal }; x_1,x_2\geq 0$$
unter den Nebenbedingungen:
$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}x_1+x_2 &\leq 5\\ 2x_1+x_2 &\leq 8\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Ein Unternehmen fertigt zwei Produkte P_1 und P_2. Die produzierten und abgesetzten Mengeneinheiten von P_1 betragen x, die produzierten und abgesetzten Mengeneinheiten von P_2 betragen y. Der Verkaufspreis von einer Mengeneinheit (ME) von Produkt P_1 beträgt 18 Geldeinheiten (GE), der Verkaufspreis von einer ME von P_2 beträgt 9 GE. Die Kosten betragen:
$$K(x,y)=3xy+4{,}5x^2+y^2+10;\quad x,y\in[0;5]$$

a) Geben Sie die Umsatzfunktion (Erlösfunktion) an.

b) Bestimmen Sie die gewinnmaximale Mengenkombination der beiden Produkte und den maximalen Gewinn.

c) Berechnen Sie die Grenzkosten von Produkt P_1 und die Grenzkosten von Produkt P_2.

Aufgabe 4

Zu Beginn der Jahre 2009, 2012 und 2016 möchte eine Familie jeweils 10 000 Euro ihren Kindern als Ausbildungsbeihilfe zur Verfügung stellen. Für dieses Vorhaben werden ab 1.1.2003 bis 31.12.2015 vorschüssige (gleich hohe) Monatsbeträge auf ein Konto eingezahlt. Die drei Ausbildungsbeihilfen der Jahre 2009, 2012, 2016 werden von diesem Konto abgehoben. Der Zins beträgt 5% (p.a.).

a) Wie hoch müssen die vorschüssigen Monatsbeträge sein?

b) Berechnen Sie den Kontostand am 31.12.2008.

c) Berechnen Sie den Kontostand am 31.12.2011.

Aufgabe 5

a) Ein Bauherr erhält von der Kreditanstalt für Wiederaufbau einen Baukredit zu folgenden Konditionen angeboten:

Kreditvolumen:	120 000 GE
Zins:	6,15 % p.a.
Tilgungsart:	Prozent-Annuitätentilgung mit einer anfänglichen Tilgung von 1,32 %
Tilgungsfreie Jahre:	das erste Jahr nach Kreditaufnahme
Zahlweise:	jährlich nachschüssig

1. Stellen Sie den Tilgungsplan (bestehend aus Schuld am Jahresanfang, den jährlichen Zinsen, der jährlichen Tilgung, der Annuität und der Schuld am Jahresende) für das erste bis vierte Jahr auf.
2. Wie viele volle Annuitäten sind zu zahlen? Wie hoch ist der ein Jahr nach der letzten vollen Annuität zu zahlende Restbetrag?

b) Auf Grund einer Veränderung am Kapitalmarkt zwischen Beantragung und Auszahlung des Kredits fällt der jährliche Zinssatz. Wie verändern sich die Annuität und der anfängliche Tilgungssatz, wenn von folgenden Konditionen ausgegangen wird?

Kreditvolumen:	120 000 GE
Zins:	5,95 % p.a.
Tilgungsart:	Prozent-Annuitätentilgung
Tilgungsfreie Jahre:	das erste Jahr nach Kreditaufnahme
Laufzeit:	30 Jahre (inklusive des tilgungsfreien Jahres)
Zahlweise:	jährlich nachschüssig

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $\lim\limits_{x\to -5} \frac{x^2+4x-5}{7x+35} = \lim\limits_{x\to -5} \frac{(x+5)(x-1)}{7(x+5)} = \lim\limits_{x\to -5} \frac{x-1}{7} = -\frac{6}{7}$
d.h. der Grenzwert beträgt $-6/7$.

b) 1)

Zeile							Operation
$\boxed{1}$	1	−1	2	1	0	0	
$\boxed{2}$	3	1	1	0	1	0	
$\boxed{3}$	−2	−2	0	0	0	1	
$\boxed{4}$	1	−1	2	1	0	0	$\boxed{1}$
$\boxed{5}$	0	4	−5	−3	1	0	$\boxed{2} - 3 \cdot \boxed{1}$
$\boxed{6}$	0	−4	4	2	0	1	$\boxed{3} + 2 \cdot \boxed{1}$
$\boxed{7}$	1	−1	2	1	0	0	$\boxed{4}$
$\boxed{8}$	0	4	−5	−3	1	0	$\boxed{5}$
$\boxed{9}$	0	0	−1	−1	1	1	$\boxed{6} + \boxed{5}$
$\boxed{10}$	4	0	3	1	1	0	$4 \cdot \boxed{7} + \boxed{8}$
$\boxed{11}$	0	4	−5	−3	1	0	$\boxed{8}$
$\boxed{12}$	0	0	−1	−1	1	1	$\boxed{9}$
$\boxed{13}$	4	0	0	−2	4	3	$\boxed{10} + 3 \cdot \boxed{12}$
$\boxed{14}$	0	4	0	2	−4	−5	$\boxed{11} - 5 \cdot \boxed{12}$
$\boxed{15}$	0	0	−1	−1	1	1	$\boxed{12}$
$\boxed{16}$	1	0	0	−1/2	1	3/4	$\boxed{13} \div 4$
$\boxed{17}$	0	1	0	1/2	−1	−5/4	$\boxed{14} \div 4$
$\boxed{18}$	0	0	1	1	−1	−1	$\boxed{15} \div (-1)$

d.h. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 3/4 \\ 1/2 & -1 & -5/4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

2) Gaußalgorithmus

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
$\boxed{1}$	1	−1	2	16	
$\boxed{2}$	3	1	1	4	
$\boxed{3}$	−2	−2	0	−8	
$\boxed{4}$	1	−1	2	16	$\boxed{1}$
$\boxed{5}$	0	4	−5	−44	$\boxed{2} - 3 \cdot \boxed{1}$
$\boxed{6}$	0	−4	4	24	$\boxed{3} + 2 \cdot \boxed{1}$
$\boxed{7}$	1	−1	2	16	$\boxed{4}$
$\boxed{8}$	0	4	−5	−44	$\boxed{5}$
$\boxed{9}$	0	0	−1	−20	$\boxed{6} + \boxed{5}$

$\boxed{9}$: $-x_3 = -20 \Rightarrow x_3 = 20$

$\boxed{8}$: $4x_2 - 5x_3 = -44 \Rightarrow 4x_2 = -44 + 100 = 56 \Rightarrow x_2 = 14$

$\boxed{7}$: $x_1 - x_2 + 2x_3 = 16 \Rightarrow x_1 = 16 + 14 - 40 = -10$

oder

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=E} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 20 \end{bmatrix}$$

d.h. $x_1 = -10$, $x_2 = 14$ und $x_3 = 20$.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) $x_1 =$ ME von P_1
$x_2 =$ ME von P_2
$110x_1 + 50x_2 \overset{!}{=}$ maximal ; $x_1, x_2 \geq 0$

I	$16x_1 + 4x_2$	≤ 320
II	$x_1 + x_2$	≤ 50

b)

	x_1	x_2	
e_1	$1/2$	1	5
e_2	$\boxed{2}$	1	8
	-150	-100	0

	e_2	x_2	
e_1	$-1/4$	$\boxed{3/4}$	3
x_1	$1/2$	$1/2$	4
	75	-25	600

	e_2	e_1	
x_2	$-1/3$	$4/3$	4
x_1	$2/3$	$-2/3$	2
	$66\,2/3$	$33\,1/3$	700

d.h. die optimale Lösung beträgt $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$, der optimale Z-Wert beträgt 700.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Umsatz $U(x, y) = 18x + 9y$

b) Gewinn $G(x, y) = U(x, y) - K(x, y) = 18x + 9y - 3xy - 4{,}5x^2 - y^2 - 10$

$$\begin{aligned} G_x(x,y) &= 18 - 3y - 9x \\ G_y(x,y) &= 9 - 3x - 2y \\ G_{xx}(x,y) &= -9 \\ G_{yy}(x,y) &= -2 \\ G_{xy}(x,y) &= -3 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:

I	$0 = 18 - 3y - 9x$
II	$0 = 9 - 3x - 2y$
I	$0 = 18 - 9x - 3y$
$3 \cdot$ II	$0 = 27 - 9x - 6y$
I $- 3 \cdot$ II	$0 = -9 + 3y \quad \Rightarrow y = 3$
I	$0 = 18 - 9 - 9x \quad \Rightarrow x = 1$

d.h. $(x, y) = (1; 3)$ ist eine mögliche Extremstelle

Hinreichende Bedingung:
$D(x,y) = (-9)\cdot(-2) - (-3)^2 = 9 >_{\text{immer}} 0$
$G_{xx}(x,y) = -9 <_{\text{immer}} 0$
d.h. $(x,y) = (1;3)$ = globales Maximum
d.h. die gewinnmaximale Mengenkombination beträgt $x = 1$ und $y = 3$.
$G(1,3) = 12{,}5$
d.h. der maximale Gewinn beträgt 12,5 GE.

c) Die Grenzkosten von Produkt P_1 betragen $K_x(x,y) = 3y + 9x$ und die Grenzkosten von Produkt P_2 betragen $K_y(x,y) = 3x + 2y$

Lösung zu Aufgabe 4:

a) Wert der Abhebungen am 1.1.2003:
$$\frac{10\,000}{1{,}05^6} + \frac{10\,000}{1{,}05^9} + \frac{10\,000}{1{,}05^{13}} = 19\,211{,}46$$

Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$$19\,211{,}46 = r_J \cdot \frac{1{,}05^{13}-1}{0{,}05} \cdot \frac{1}{1{,}05^{13}} \Rightarrow r_J = 2\,045{,}17$$

Vorschüssige monatliche Rente r_M:
$2\,045{,}17 = r_M\,(12 + 6{,}5\cdot 0{,}05) \Rightarrow r_M = 165{,}94$
d.h. die vorschüssigen Monatsrente beträgt 165,95 Euro.

b) $$2\,045{,}17 \cdot \frac{1{,}05^6 - 1}{0{,}05} = 13\,911{,}07$$
d.h. der Kontostand am 31.12.2008 beträgt 13 911,07 Euro.

c) $$3\,911{,}07 \cdot 1{,}05^3 + 2\,045{,}17 \cdot \frac{1{,}05^3-1}{0{,}05} = 10\,974{,}95$$
d.h. der Kontostand am 31.12.2011 beträgt 10 974,95 Euro.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) 1. $A = (0{,}0615 + 0{,}0132)120\,000 = 7\,380 + 1\,584 = 8\,964$

Jahr	Schuld (JA)	Zinsen	Tilgung	Annuität	Schuld (JE)
1	120 000	7 380	–	7 380	120 000
2	120 000	7 380	1 584	8 964	118 416
3	118 416	7 282,58	1 681,42	8 964	116 734,58
4	116 734,58	7 179,18	1 784,82	8 964	114 949,76

2. $$a_n = \frac{120\,000}{8\,964}$$
$$n = -\frac{\ln[1 - a_n \cdot 0{,}0615]}{\ln 1{,}0615} = 29{,}04$$
d.h. 29 volle Annuitäten
$$K_{29} = 120\,000 \cdot 1{,}0615^{29} - 8\,964 \cdot \frac{1{,}0615^{29}-1}{0{,}0615} = 357{,}57$$

$357{,}57 \cdot 1{,}0615 = 379{,}56$
d.h. die Restzahlung beträgt 379,56 GE

b) $A = 120\,000 \cdot 1{,}0595^{29} \cdot \dfrac{0{,}0595}{1{,}0595^{29} - 1} = 8\,783{,}36$
d.h. die Annuität beträgt 8 783,36
$8\,783{,}36 = 120\,000(0{,}0595 + t) \Rightarrow t = 0{,}0137$
d.h. die anfängliche Tilgung beträgt 1,37 %