Mathematik-Klausur vom 10. Februar 2003

Aufgabe 1
Für eine Hausrenovierung wurde ein Kredit von 25 000 € bei einem Zinssatz von 6,5% (p.a.) aufgenommen.
Die Laufzeit soll 30 Jahre betragen.

a) Berechnen Sie die Annuität für die vertraglich festgelegte Annuitätentilgung sowie die zugehörigen monatlichen, vorschüssig zu zahlenden Raten.

Nach 16 Jahren wird der Zinssatz auf 7,5% (p.a.) angehoben.

b) Wie ändert sich die Annuität, wenn die Gesamtlaufzeit von 30 Jahren eingehalten werden soll?

c) Wie lange sind nach den 16 Jahren noch volle Annuitäten zu zahlen, wenn, alternativ zu b), die ursprüngliche Annuität beibehalten wird?

Lösung:

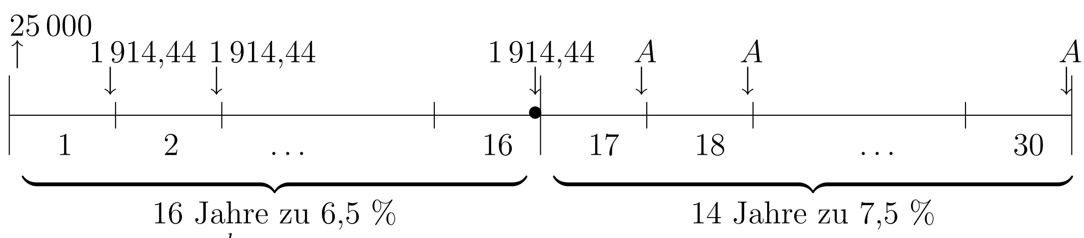
a) $K_0 \cdot q^n = A \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

$$A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = 25\,000 \cdot 1{,}065^{30} \cdot \frac{0{,}065}{1{,}065^{30} - 1} = 1\,914{,}44$$

$$r_j = r_u \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot i \right)$$

$1\,941{,}44 = r_u\,(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}065) \Rightarrow r_u = 154{,}11$
d.h. die jährliche Annuität beträgt 1 914,44 € und die monatlich vorschüssige Rate beträgt 154,11 €.

b) Zuerst müssen wir die Restschuld berechnen, die mit den neuen Annuitäten zurückgezahlt werden soll.



$$K_k = K_0 \cdot q^k - A \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

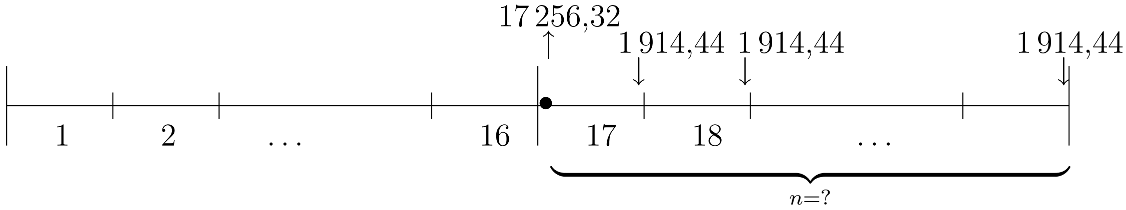
$$K_{16} = 25\,000 \cdot 1{,}065^{16} - 1\,914{,}44 \cdot \frac{1{,}065^{16} - 1}{0{,}065} = 17\,256{,}32$$

Jetzt können wir aus der Restschuld die neue Annuität für die letzten 14 Jahre berechnen.

$$A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = 17\,256{,}32 \cdot 1{,}075^{14} \cdot \frac{0{,}075}{1{,}075^{14} - 1} = 2\,032{,}75$$

d.h. nach 16 Jahren erhöht sich die Annuität auf 2 032,75 €.

c) Wir haben folgende Zahlungsströme:



$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{K_0}{r_j}\cdot(q-1)\right]}{\ln q} = -\frac{\ln\left[1 - \frac{17\,256{,}32}{1\,914{,}44}\cdot 0{,}075\right]}{\ln 1{,}075} = 15{,}6$$

d.h. es sind noch 15 Jahre volle Annuitäten zu zahlen.

Aufgabe 2

In einem Unternehmen erbringen drei Kostenstellen K_1, K_2, K_3 Leistungen für den Absatzmarkt und Leistungen für die jeweils anderen Kostenstellen. Für den Absatzmarkt erbringen Kostenstelle K_1 30 ME, Kostenstelle K_2 85 ME und Kostenstelle K_3 20 ME. Die gegenseitigen Leistungsabgaben (in ME) zwischen den Kostenstellen sind gegeben durch:

Lieferant	Empfänger		
	K_1	K_2	K_3
K_1	-	10	20
K_2	20	-	15
K_3	10	20	-

In der Kostenstelle K_1 fallen 200 GE, in der Kostenstelle K_2 320 GE und in der Kostenstelle K_3 180 GE als Stellenprimärkosten (Primärkosten) an. Berechnen Sie die innerbetrieblichen Verrechnungspreise.

Hinweis: Die Endergebnisse sind nicht ganzzahlig. Runden Sie bei Ihren Berechnungen auf zwei Nachkommastellen.

Lösung:

v_i=Bewertung für eine in K_i hergestellte ME

$$\begin{array}{rrcl} \text{I} & (10+20+30)v_1 - 20v_2 - 10v_3 & = & 200 \\ \text{II} & (20+15+85)v_2 - 10v_1 - 20v_3 & = & 320 \\ \text{III} & (10+20+20)v_3 - 20v_1 - 15v_2 & = & 180 \end{array}$$

Wir sortieren die Gleichungen nach v_1, v_2, v_3 und dividieren alle drei Gleichungen durch 10:

Zeile	v_1	v_2	v_3		Operation
1	6	−2	−1	20	
2	$\boxed{-1}$	12	−2	32	
3	−2	−1,5	5	18	
4	−1	12	−2	32	2
5	0	$\boxed{-25{,}5}$	9	−46	3−2 · 2
6	0	70	−13	212	1+6 · 2
7	−1	12	−2	32	4
8	0	−25,5	9	−46	5
9	0	0	298,5	2 186	25,5 · 6+ 70 · 5

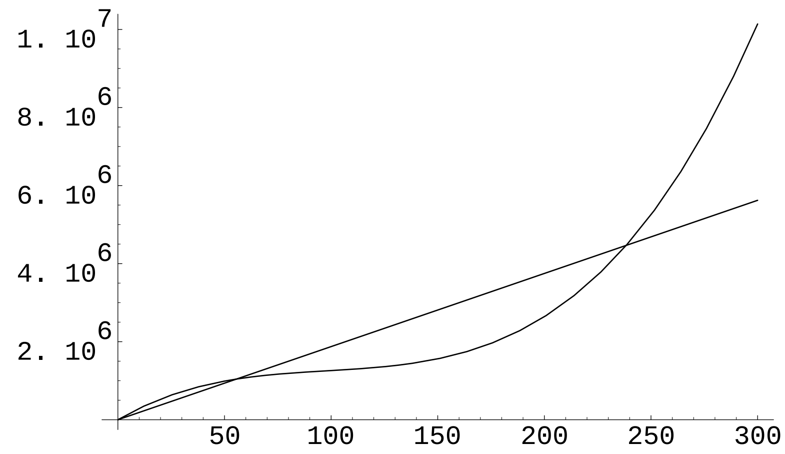
9 $298{,}5v_3 = 2\,186 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 7{,}3233$
8 $-25{,}5v_2 + 9 \cdot 7{,}3233v_3 = -46 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 4{,}3886$
7 $-v_1 + 12 \cdot 4{,}3886 - 2 \cdot 7{,}3233 = 32 \quad \Rightarrow v_1 = 6{,}0168$
d.h. die innerbetrieblichen Verrechungspreise betragen $v_1 = 6{,}02$ GE, $v_2 = 4{,}39$ GE und $v_3 = 7{,}32$ GE.

Aufgabe 3
Für ein Unternehmen gilt die folgende S-förmige Kostenfunktion $K(x)$ in Abhängigkeit von der produzierten und abgesetzten Menge x. Die Kosten sind komplett variabel, es gibt keine Fixkosten. Die Kapazitätsgrenze liegt bei $x = 300$ Stück.

$$K(x) = x^3 - 294x^2 + 32\,000x$$

Außerdem gilt die folgende Umsatzfunktion (Erlösfunktion) $U(x)$:

$$U(x) = 18\,740x$$



a) Bestimmen Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich der Kostenfunktion und der Umsatzfunktion (Erlösfunktion).

b) Bestimmen Sie die folgenden „kritischen“ Mengen:

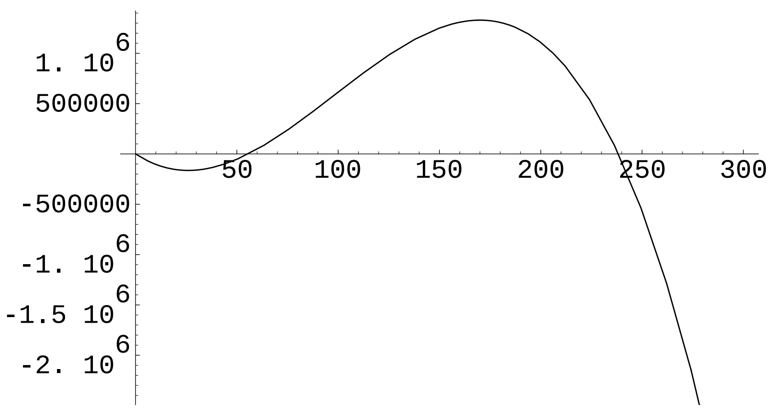
1. Die Menge, für die die Stückkosten (Durchschnittskosten) minimal sind (Betriebsoptimum)
2. die Menge, für die der Gewinn maximal ist (Betriebsmaximum)
3. die Menge, für die die variablen Stückkosten (variablen Durchschnittskosten) minimal sind (Betriebsminimum)

Lösung:

a) $K(x) = x^3 - 294x^2 + 32\,000x;\;\; x \in [0; 300]$
$U(x) = 18\,740x;\;\; x \in [0; 300]$
d.h. der ökonomisch sinnvolle Definitonsbereich für die produzierte und abgesetzte Menge x ist das Intervall [0;300].

b) 1. $k(x) = \dfrac{K(x)}{x} = x^2 - 294x + 32\,000$
$k'(x) = 2x - 294 = 0 \Rightarrow x = 147$
$k''(x) = 2 <_{\text{immer}} 0$
d.h. in $x = 147$ liegt ein globales Minimum der Stückkostenfunktion.

2. $G(x) = U(x) - K(x) = -x^3 + 294x^2 - 13\,260x$
$G'(x) = -3x^2 + 588x - 13\,260$
$G''(x) = -6x + 588$
Notwendige Bedingung:
$$\begin{aligned} 0 &= -3x^2 + 588x - 13\,260 && \mid \div(-3) \\ 0 &= x^2 - 196x + 4\,420 && \mid \text{pq-Formel} \\ x &= 98 \pm \sqrt{9\,604 - 4\,420} = 98 \pm 72 \\ x &= 170 \text{ oder } x = 26 \end{aligned}$$
Hinreichende Bedingung:
$G''(26) = -6 \cdot 26 + 588 = 432 > 0$
$G''(170) = -6 \cdot 170 + 588 = -432 < 0$
d.h. $x = 170$ lokales Max.
Ferner muss die Gewinnfunktion auf Grund der lokalen Extremwerte folgende Gestalt haben:



Also haben wir den Rand $x = 0$ und das lokale Maximum $x = 170$ als mögliche Kandidaten für die Maximalstelle:

$$G(0) = 0 \text{ und } G(170) = 1\,329\,400$$

d.h. $x = 170$ globales Max. von $G(x)$ im Intervall [0;300]
d.h. $x = 170$ ist die Gewinn-maximale Menge.

3. Da keine Fixkosten vorhanden sind, gilt:

$$\underbrace{k_v(x)}_{\text{var. Stückkosten}} = \underbrace{k(x)}_{\text{Stückkosten}}$$

Also sind Betriebsoptimum und Betriebsminimum identisch $x = 147$.

Aufgabe 4

Ein Monopolist verkauft zwei Produkte mit folgenden Nachfragefunktionen:

$$\begin{aligned} p_1(x_1) &= 16 - 2x_1; \quad (0 \leq x_1 \leq 8) \\ p_2(x_2) &= 12 - x_2; \quad (0 \leq x_2 \leq 12) \end{aligned}$$

Seine Gesamtkosten betragen:

$$K(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2; \quad x_1 \in [0; 8], \; x_2 \in [0; 12]$$

(p_1 bzw. p_2 Marktpreise von Produkt 1 bzw. Produkt 2)
(x_1 bzw. x_2 Produktions- und Absatzmengen von Produkt 1 bzw. Produkt 2)

a) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion.

b) Gesucht ist die Menge und der Preis für jedes Produkt, so dass ein maximaler Gewinn erreicht wird.

Lösung:

a) Umsatz(Erlös):

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2) &= p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \\ &= (16 - 2x_1) \cdot x_1 + (12 - x_2) \cdot x_2 \\ &= 16x_1 - 2x_1^2 + 12x_2 - x_2^2 \end{aligned}$$

Gewinn:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= U(x_1, x_2) - K(x_1, x_2) \\ &= 16x_1 - 2x_1^2 + 12x_2 - x_2^2 - (x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2) \\ &= -3x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_1x_2 + 16x_1 + 12x_2 \end{aligned}$$

b) Ableitungen:

$$\begin{aligned} G_{x_1}(x_1, x_2) &= -6x_1 - 4x_2 + 16 \\ G_{x_2}(x_1, x_2) &= -4x_2 - 4x_1 + 12 \\ G_{x_1x_1}(x_1, x_2) &= -6 \\ G_{x_2x_2}(x_1, x_2) &= -4 \\ G_{x_1x_2}(x_1, x_2) &= -4 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{cccll} \text{I} & 0 & = & -6x_1 - 4x_2 + 16 & \\ \text{II} & 0 & = & -4x_2 - 4x_1 + 12 & \\ \hline \text{I} - \text{II} & 0 & = & -2x_1 + 4 & \Rightarrow x_1 = 2 \\ \text{I} & 0 & = & -6 \cdot 2 - 4x_2 + 16 & = -12 - 4x_2 + 16 = 4 - 4x_2 \Rightarrow x_2 = 1 \end{array}$$

Hinreichende Bedingung:
$D = (-6) \cdot (-4) - (-4)^2 = 24 - 16 = 8 >_{\text{immer}} 0$
$G_{x_1 x_1}(x_1, x_2) = -6 >_{\text{immer}} 0$
d.h. (2;1) glob. Max.
Gewinn-maximale Preise:
$p_1(2) = 16 - 2 \cdot 2 = 12$
$p_2(1) = 12 - 1 = 11$
d.h. die Gewinn-maximalen Mengen betragen $x_1 = 2$ ME und $x_2 = 1$ ME und die Gewinn-maximalen Preise sind $p_1 = 12$ GE und $p_2 = 11$ GE.

Aufgabe 5
Ein Unternehmen stellt Konservendosen her. Das Erzeugnis wird in 1-kg und 2-kg Dosen abgefüllt und verkauft, wobei folgende Voraussetzungen erfüllt werden müssen:

- Auf der Produktionsanlage, auf der Bleche zu Dosen gefertigt werden, dauert die Fertigstellung von 100 Dosen gleich welcher Größe eine Stunde. Die Anlage kann höchstens 70 Stunden pro Woche in Betrieb sein.
- Von dem Erzeugnis können bis zu maximal 10 000 kg pro Woche in einem vorgeschalteten Produktionsgang bereit gestellt werden.
- Die Verkaufsabteilung kann pro Woche 6 000 kg in 1-kg Dosen und 8 000 kg in 2-kg Dosen absetzen.
- Der Deckungsbeitrag beträgt bei der 1-kg Dose 0,02 €/Dose und bei der 2-kg Dose 0,03 €/Dose.

Wie viele von den 1-kg bzw. 2-kg Dosen sind pro Woche herzustellen, um einen maximalen Deckungsbeitrag zu erzielen?

a) Stellen Sie das mathematische Modell auf.

b) Bestimmen Sie die optimale Lösung mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

c) Wie lautet das optimale Produktionsprogramm?

Lösung:

a) x_1 = Anzahl der 1-kg Dosen
x_2 = Anzahl der 2-kg Dosen

$$\begin{array}{lrcr} \text{I} & 0{,}01x_1 + 0{,}01x_2 & \leq & 70 \\ \text{II} & x_1 + 2x_2 & \leq & 10\,000 \\ \text{III} & x_1 & \leq & 6\,000 \\ \text{IV} & x_2 & \leq & 4\,000 \end{array}$$

$$0{,}02x_1 + 0{,}03x_2 \overset{!}{=} \text{maximal}; x_1, x_2 \geq 0$$

b) Simplexalgorithmus:

1.	x_1	x_2	
e_1	0,01	0,01	70
e_2	1	2	10 000
e_3	1	0	6 000
e_4	0	$\boxed{1}$	4 000
	−0,02	−0,03	0

2.	x_1	e_4	
e_1	0,01	−0,01	30
e_2	$\boxed{1}$	−2	2 000
e_3	1	0	6 000
x_2	0	1	4 000
	−0,02	0,03	120

3.	e_2	e_4	
e_1	−0,01	$\boxed{0{,}01}$	10
x_1	1	−2	2 000
e_3	−1	2	4 000
x_2	0	1	4 000
	0,02	−0,01	160

4.	e_2	e_1	
e_4	−1	100	1 000
x_1	−1	200	4 000
e_3	1	−200	2 000
x_2	1	−100	3 000
	0,01	1	170

Die optimale Lösung sieht wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,000 \\ 3\,000 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 2\,000 \\ 1\,000 \end{pmatrix} \text{ mit optimalem Zielfunktionswert } Z = 170$$

c) Es sind pro Woche 4000 1-kg Dosen und 3000 2-kg Dosen abzufüllen, um einen maximalen Deckungsbeitrag von 170 GE zu erzielen.