Mathematik-Klausur vom 14.7.2003

Aufgabe 1

a) Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie $A + B$ und $A \cdot B$.

b) Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 - 12x + 9}.$$

c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = 2x^2 + 2x - \ln(x) \quad , x > 0$$

keine Wendepunkte (Wendestellen) hat.

d) Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion

$$h(x) = \ln(x) \cdot (x^2 + 1) \quad , x > 0.$$

Aufgabe 2

Zwischen den Preisen p_1 bzw. p_2 und den Absatzmengen x_1 bzw. x_2 zweier Güter besteht folgender Zusammenhang:

$$p_1 = 49 - 0{,}5 \cdot x_2 \quad ; x_1, x_2 \in [0; 19]$$
$$p_2 = 39 - 0{,}5 \cdot x_1 \quad ; x_1, x_2 \in [0; 19]$$

Die Produktionskosten werden durch die Funktion

$$K(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 1{,}5x_2^2 + 2x_1x_2 + 800 \quad ; x_1, x_2 \in [0; 19]$$

beschrieben.

a) Geben Sie die Umsatzfunktion (Erlösfunktion) $U(x_1, x_2)$ an.

b) Zeigen Sie, dass die Gewinnfunktion die folgende Gestalt hat:

$$G(x_1, x_2) = 49x_1 + 39x_2 - 2x_1^2 - 1{,}5x_2^2 - 3x_1x_2 - 800 \quad ; x_1, x_2, \in [0; 19]$$

c) Für welche Mengenkombination (x_1, x_2) ist der Gewinn maximal?

d) Es sollen von den beiden Gütern zusammen genau zwölf Mengeneinheiten produziert werden. Für welche Mengenkombination (x_1, x_2) sind dann die Produktionskosten minimal?
(*Hinweis: Bearbeiten Sie diese Fragestellung mit dem Einsetzungsverfahren.*

Aufgabe 3:

Ein Kredit über 50 000 € soll in fünf Jahren bei 7% Zins p.a. getilgt werden. Der erste Rückzahlungsbetrag ist fällig ein Jahr nach Kapitalaufnahme.

a) Wie gestaltet sich der Tilgungsplan, wenn mit gleich großen Tilgungsraten zurückgezahlt wird?

b) Wie gestaltet sich der Tilgungsplan, wenn mit gleich großen Annuitäten zurückgezahlt wird?

c) Berechnen Sie den Barwert aller jährlichen Belastungen (Annuität) bei der Raten- bzw. Annuitätentilgung.

d) Berechnen Sie den Barwert aller jährlichen Zinszahlungen bei der Raten- bzw. Annuitätentilgung.

Aufgabe 4:
Bei 4% Zinseszins pro Jahr werden auf ein Konto folgende Beträge eingezahlt:

- 2 000 € am 1.1.2003
- 4 000 € am 1.1.2005
- 6 000 € am 1.1.2008

a) Aus dem angesparten Guthaben sollen ab 1.1.2010 jeweils zu Beginn des Jahres regelmäßig 1 000 € abgehoben werden. Wie lange können die vollen Beträge abgehoben werden?

b) Aus dem angesparten Guthaben soll ab 1.1.2010 eine monatliche Rente über 90 € fällig jeweils zu Beginn eines Monats bezogen werden. Wie hoch ist das Restguthaben am 31.12.2027?

c) Aus dem angesparten Guthaben soll ab 1.1.2010 eine ewige Rente fällig jeweils zu Beginn des Jahres bezogen werden. Wie hoch ist diese ewige Rente?

Aufgabe 5
Ein Unternehmen produziert aus zwei Rohstoffen R_1 und R_2 drei Güter P_1, P_2, P_3. Vom Rohstoff R_1 stehen in der kommenden Periode 150 ME, vom Rohstoff R_2 250 ME zur Verfügung. Die Produktionskosten und der Rohstoffverbrauch sind wie folgt gegeben:

	Produktionskosten pro ME	Verbrauch an Rohstoff R_1 pro ME	Verbrauch an Rohstoff R_2 pro ME
Gut P_1	2 GE	2 ME	1 ME
Gut P_2	5 GE	1 ME	0 ME
Gut P_3	8 GE	0 ME	2 ME

In der kommenden Periode werden von allen drei Gütern zusammen mindestens 100 ME hergestellt. Gesucht ist das kostenminimale Produktionsprogramm.

a) Formulieren Sie das lineare Optimierungsproblem.

b) Stellen Sie das Anfangstableau des Simplex-Algorithmus auf.

c) Berechnen Sie ausgehend von b) zwei weitere Tableaus. Geben Sie für beide Tableaus die jeweilige Basislösung (Produktionsprogramm und Schlupfvariablen) an.

d) Im Endtableau des Simplex-Algorithmus zu diesem Optimierungsproblem gibt es in der Zeile der Zielfunktion („Z-Zeile“) einen Eintrag mit dem Wert „0“. Was bedeutet diese „0“ für die optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems?

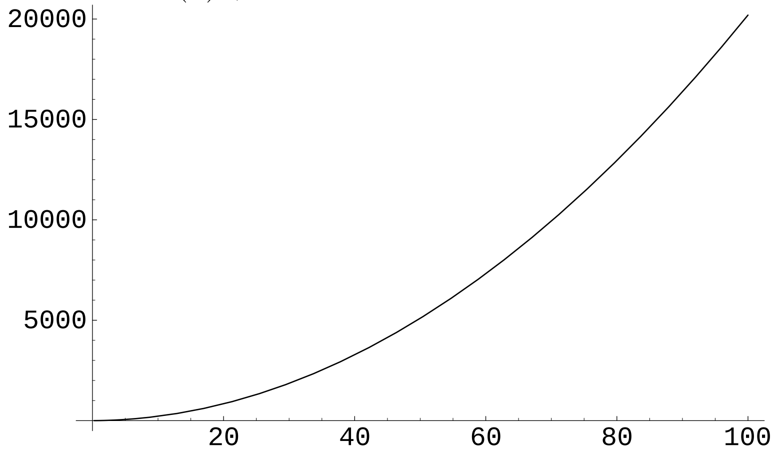
Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ und $A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 - 12x + 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x-3)}{3(x-3)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{3(x-1)} = \dfrac{0}{6} = 0$

c) $f(x) = 2x^2 + 2x - \ln(x) \ ; x > 0$



$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4x + 2 - \frac{1}{x} \\
f''(x) &= 4 + \frac{1}{x^2} \\
f'''(x) &= -\frac{2}{x^3}
\end{aligned}
$$

$$0 = f''(x) = 4 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{4} \quad \lightning$$

d.h. $f''(x)$ hat keine Nullstellen. Also besitzt $f(x)$ keine Wendestellen.

d) $h'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \left(x^2 + 1\right) + \ln(x) \cdot 2x = 2x \cdot \ln(x) + x + \dfrac{1}{x}$

Lösung zu Aufgabe 2:
Bei komplementären Gütern (z.B. Tabak und Pfeifen) kann der Preis eines Gutes lediglich von der Absatzmenge des jeweils komplementären Gutes abhängen.

a) $U(x_1, x_2) = 49x_1 + 39x_2 - x_1 \cdot x_2 \qquad ; x_1, x_2 \in [0; 19]$

b)
$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= U(x_1, x_2) - K(x_1, x_2) \qquad\qquad ; x_1, x_2 \in [0; 19] \\ &= 49x_1 + 39x_2 - 2x_1^2 - 1{,}5x_2^2 - 3x_1x_2 - 800 \end{aligned}$$

c) Ableitungen:
$$\begin{aligned} G_{x_1}(x_1, x_2) &= -4x_1 - 3x_2 + 49 \\ G_{x_2}(x_1, x_2) &= -3x_1 - 3x_2 + 39 \\ G_{x_1x_1}(x_1, x_2) &= -4 \\ G_{x_2x_2}(x_1, x_2) &= -3 \\ G_{x_1x_2}(x_1, x_2) &= -3 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:
$$\begin{array}{cccl} \text{I} & 0 & = & -4x_1 - 3x_2 + 49 \\ \text{II} & 0 & = & -3x_1 - 3x_2 + 39 \\ \hline \text{I} - \text{II} & 0 & = & -x_1 + 10 \qquad \Rightarrow x_1 = 10 \\ \text{I} & 0 & = & -4 \cdot 10 - 3x_2 + 49 \;\; = -40 - 3x_2 + 49 = 9 - 3x_2 \Rightarrow x_2 = 3 \end{array}$$

Hinreichende Bedingung:
$D(x_1, x_2) = (-4) \cdot (-3) - (-3)^2 = 12 - 9 = 3 >_{\text{immer}} 0$
$G_{x_1x_1}(x_1, x_2) = -4 <_{\text{immer}} 0$
d.h. (10;3) glob. Max.
d.h. die Gewinn-maximalen Mengen betragen $x_1 = 10$ ME und $x_2 = 3$ ME.

d) $K(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 1{,}5x_2^2 + 2x_1x_2 + 800 \overset{!}{=}$ minimal unter Nebenbedingung $x_1 + x_2 = 12$
$\Rightarrow x_1 = 12 - x_2$
$$\begin{aligned} \text{Setze } f(x_2) &= 2(12 - x_2)^2 + 1{,}5x_2^2 + 2(12 - x_2)x_2 + 800 \\ &= 288 - 48x_2 + 2x_2^2 + 1{,}5x_2^2 + 24x_2 - 2x_2^2 + 800 \\ &= 1{,}5x_2^2 - 24x_2 + 1088 \\ f'(x_2) &= 3x_2 - 24 \\ f''(x_2) &= 3 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:
$0 = 3x_2 - 24 \Rightarrow x_2 = 8$
Hinreichende Bedingung:
$f''(x_2) = 3 >_{\text{immer}} 0$
d.h. $K(x_1, x_2)$ hat in $(4; 8)$ ein globales/absolutes Minimum unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.
Sollen von beiden Gütern zusammen 12 ME hergestellt werden und gleichzeitig die Kosten minimiert werden, so sind 4 ME von Gut 1 ME und 8 ME von Gut 2 herzustellen.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) $T = \dfrac{50\,000}{5} = 10\,000$

Jahr	Zinsen am Ende d.J.	Tilgung am Ende d.J.	Annuität am Ende d.J.	Schuld am Ende d.J.
1	3 500	10 000	13 500	40 000
2	2 800	10 000	12 800	30 000
3	2 100	10 000	12 100	20 000
4	1 400	10 000	11 400	10 000
5	700	10 000	10 700	0

b) $A = 50\,000 \cdot 1{,}07^5 \cdot \dfrac{0{,}07}{1{,}07^5 - 1} = 12\,194{,}54$

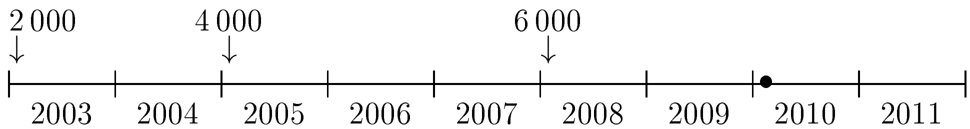
Jahr	Zinsen am Ende d.J.	Tilgung am Ende d.J.	Annuität am Ende d.J.	Schuld am Ende d.J.
1	3 500	8 694,54	12,194,54	41 305,47
2	2 891,38	9 303,16	12 194,54	32 002,31
3	2 240,16	9 954,38	12 194,54	22 047,93
4	1 543,36	10 651,19	12 194,54	11 396,75
5	797,77	11 396,77	12 194,54	≈ 0

c) Ratentilgung $K_0 = 50\,000$
Annuitätentilgung $K_0 = 50\,000$

d) Ratentilgung $Z_0 = \dfrac{3\,500}{1{,}07} + \ldots + \dfrac{700}{1{,}07^5} = 8\,998{,}03$

Annuitätentilgung $Z_0 = \dfrac{3\,500}{1{,}07} + \ldots + \dfrac{797{,}77}{1{,}07^5} = 9\,371{,}33$

Lösung zu Aufgabe 4:
Guthaben am 1.1.2010



$2000 \cdot 1{,}04^7 + 4000 \cdot 1{,}04^5 + 6000 \cdot 1{,}04^2 = 13\,988{,}08$

a) $r \cdot q = 1\,000 \cdot 1{,}04 = 1\,040$

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{13\,988{,}08}{1\,040} \cdot 0{,}04\right]}{\ln 1{,}04} = 19{,}7$$

d.h. volle Beträge 19 Jahre lang.

b) $r_j = 90(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) = 1\,103{,}40$

$13\,988{,}08 \cdot 1{,}04^{18} - 1\,103{,}40 \cdot \frac{1{,}04^{18}-1}{0{,}04} = 40{,}15$
d.h. am 31.12.2027 beträgt das Restguthaben 40,15 €

c) $R_0 = 13\,988{,}08$
$13\,988{,}08 \cdot 0{,}04 = 559{,}59$ ewige nachschüssige Rente
$\dfrac{559{,}59}{1{,}04} = 538$
d.h. die ewige vorschüssige Rente beträgt 538 €

Lösung zu Aufgabe 4:

a) x_1 = produzierte ME von Gut P_1
x_2 = produzierte ME von Gut P_2
x_3 = produzierte ME von Gut P_3

$$\begin{array}{crcl} \text{I} & 2x_1 + x_2 & \leq & 150 \\ \text{II} & x_1 + 2x_3 & \leq & 250 \\ \text{III} & x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 100 \end{array}$$

$2x_1 + 5x_2 + 8x_3 \stackrel{!}{=} \text{minimal}\ ; x_1, x_2, x_3 \geq 0$

b) Start-Tableau des Simplex-Algorithmus

1	x_1	x_2	x_3	
e_1	2	1	0	150
e_2	1	0	2	250
e_3	-1	$\boxed{-1}$	-1	-100
	2	5	8	0

c) Simplex-Algorithmus:

2	x_1	e_3	x_3	
e_1	$\boxed{1}$	1	-1	50
e_2	1	0	2	250
x_2	1	-1	1	100
	-3	5	3	-500

Basislösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ \hline 50 \\ 250 \\ 0 \end{pmatrix}$

3	e_1	e_3	x_3	
x_1	1	1	-1	50
e_2	-1	-1	3	200
x_2	-1	-2	2	50
	3	8	0	-350

Basislösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Die Basislösung des 3. Tableaus ist gleichzeitig auch die optimale Lösung.

d) Steht im Endtableau eines Simplex-Algorithmus in der Zielfunktionszeile eine Null, so ist die optimale Lösung nicht eindeutig.