Mathematik-Klausur vom 14.7.2004

Studiengang BWL DPO 1997:	Aufgaben 2,3,4,5,6	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang B&FI DPO 2001:	Aufgaben 2,3,4,5,6	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang BWL DPO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang B&FI DPO 2003:	Aufgaben 1,2,3,4,5	Dauer der Klausur: 120 Min
Studiengang Wirtschaftsrecht:	Aufgaben 4,5	Dauer der Klausur: 45 Min

Aufgabe 1

a) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ und $B \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.

Überprüfen Sie, ob B die inverse Matrix zu A ist.

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion:

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x) \ \ ; x > 0$$

c) Bestimmen Sie die Sattelstelle der Funktion:

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x \ \ ; x, y \in \mathbb{R}$$

Lösung zu Aufgabe 1

a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d.h. B ist die Inverse zu A.

b) Produktregel:
$f'(x) = 2\ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2\ln(x) + 2$

c)
$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x-2 \qquad & f_{xx}(x,y) &= 2 \\ f_y(x,y) &= -2y & f_{yy}(x,y) &= -2 \\ & & f_{xy}(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

I $\quad 0 = f_x(x,y) = 2x - 2 \Rightarrow x = 1$

II $\quad 0 = f_y(x,y) = -2y \Rightarrow y = 0$

$D(1,0) = f_{xx}(1,0) \cdot f_{yy}(1,0) - [f_{xy}(1,0)]^2 = 2 \cdot (-2) - 0 = -4 < 0$

d.h. (1,0) ist eine Sattelstelle.

Aufgabe 2

Ein Industriewerk besteht aus drei Kostenstellen K_1, K_2, K_3, die Leistungen einerseits für die jeweils anderen beiden Kostenstellen und andererseits für den Absatzmarkt erbringen.

Die Leistungen (in ME) für den Absatzmarkt sind:

K_1	K_2	K_3
100	110	120

Die gegenseitigen Leistungsabgaben (in ME) zwischen den Kostenstellen ergeben sich aus folgender Tabelle:

abgebende Stelle	empfangende Stelle K_1	K_2	K_3
K_1	0	30	10
K_2	10	0	20
K_3	20	20	0

Die Stellen-Primärkosten (in GE) betragen:

K_1	K_2	K_3
170	280	560

Bestimmen Sie die innerbetrieblichen Verrechnungspreise, indem Sie wie folgt vorgehen:

a) Stellen Sie das Gleichungssystem auf.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem und geben Sie die innerbetrieblichen Verrechnungspreise an.

Lösung zu Aufgabe 2

v_1= Bewertung (in GE) für eine in K_1 hergestellte Leistungseinheit
v_2= Bewertung (in GE) für eine in K_2 hergestellte Leistungseinheit
v_3= Bewertung (in GE) für eine in K_3 hergestellte Leistungseinheit

a)

$$\begin{array}{rrcl} \text{I} & (100+30+10)v_1 - 10v_2 - 20v_3 & = & 170 \\ \text{II} & (110+10+20)v_2 - 30v_1 - 20v_3 & = & 280 \\ \text{III} & (120+20+20)v_3 - 10v_1 - 20v_2 & = & 560 \end{array}$$

b) Gaußalgorithmus

Zeile	v_1	v_2	v_3	Primärkosten	Operation
1	140	−10	−20	170	
2	−30	140	−20	280	
3	$\boxed{-10}$	−20	160	560	
4	−10	−20	160	560	3
5	0	$\boxed{200}$	−500	−1 400	2−3 · 3
6	0	−290	2 220	8 010	1+14 · 3
7	−10	−20	160	560	4
8	0	200	−500	−1 400	5
9	0	0	29 900	119 600	20 · 6+29 · 5

9 $29\,900 v_3 = 119\,600 \Rightarrow v_3 = 4$
8 $200 v_2 - 500 \cdot 4 = -1\,400 \Rightarrow v_2 = 3$
7 $-10 v_1 - 20 \cdot 3 + 160 \cdot 4 = 560 \Rightarrow v_1 = 2$

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die innerbetrieblichen Verrechnungspreise sind $v_1 = 2$ GE, $v_2 = 3$ GE, $v_3 = 4$

GE.

Aufgabe 3

Ein monopolistisches Ein-Produkt-Unternehmen produziert seine Ausbringungsmenge x (in ME) mit Hilfe eines einzigen Produktionsfaktors r (in ME) gemäß folgender Produktionsfunktion:

$$x(r) = 2 \cdot \sqrt{r-1} \ ; r \geq 1$$

Für jede eingesetzte Mengeneinheit des Produktionsfaktors fallen 16 Geldeinheiten an Kosten an. Weitere Kosten entstehen dem Unternehmen für die Produktion des Produktes nicht. Die Ausbringungsmenge x kann am Markt abgesetzt werden entsprechend der Preis-Absatz Funktion:

$$x(p) = 40 - 0{,}25 \cdot p; \quad p \in [0; 160]$$

wobei p den Verkaufspreis pro ME bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Preis-Absatz Funktion $p(x)$ und geben Sie den Definitionsbereich an.

b) Zeigen Sie, dass sich für die Kostenfunktion $K(x) = 4x^2 + 16$ ergibt.

c) Berechnen und interpretieren Sie die Grenzkosten an der Stelle $x = 10$.

d) Berechnen Sie den maximalen Gewinn sowie den dazugehörigen Gewinnmaximalen Preis.

e) Angenommen es können in der aktuellen Periode nicht mehr als neun Mengeneinheiten produziert werden. Welchen maximalen Gewinn kann das monopolistische Unternehmen nun erzielen?

f) Bisher verlangte der Monopolist einen Preis von 120 GE pro ME und konnte insgesamt zehn Mengeneinheiten absetzen. Er entscheidet sich nun für eine 1%-ige Preissteigerung. Wie verändert sich hierdurch seine Absatzmenge?

Lösung zu Aufgabe 3

a)
$$\begin{aligned} x &= 40 - 0{,}25p && \mid +0{,}25p \\ 0{,}25p + x &= 40 && \mid -x \\ 0{,}25p &= 40 - x && \mid \div 0{,}25 \\ p &= 160 - 4x \end{aligned}$$

d.h. $p(x) = 160 - 4x$

$0 = 160 - 4x \Rightarrow x = 40$ d.h. $x \in [0; 40]$.

b) $K(x) = 16r = ?$
$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot \sqrt{r-1} && \mid \div 2 \\ 0{,}5x &= \sqrt{r-1} && \mid \text{ quadrieren} \\ 0{,}25x^2 &= r - 1 && \mid +1 \\ 0{,}25x^2 + 1 &= r \end{aligned}$$

$K(x) = 16 \cdot (0{,}25x^2 + 1) = 4x^2 + 16; \quad x \in [0; 40]$

c) $K'(x) = 8x \Rightarrow K'(10) = 80$
d.h. ausgehend von einer Produktionsmenge von 10 ME führt eine Erhöhung der Produktionsmenge um 1 ME näherungsweise zu einer Erhöhung der Kosten um 80 GE.

d) Umsatz $U(x) = p(x) \cdot x = 160x - 4x^2$
Gewinn $G(x) = U(x) - K(x) = -8x^2 + 160x - 16 \;\; ; x \in [0; 40]$
$G'(x) = -16x + 160$
$G''(x) = -16$
Notw. Bed.
$0 = G'(x) = -16x + 160 \Rightarrow x = 10$
Hinr. Bed.
$G''(x) = -16 <_{\text{immer}} 0$
d.h. $x = 10$ ist ein glob. Max.
$G(10) = 784$
$p(10) = 120$
d.h. der maximale Gewinn beträgt 784 GE und der Gewinn-maximale Preis beträgt 120 GE.

e) $G(x)$ ist im Intervall [0;9] streng monoton steigend, somit ist der Gewinn für $x = 9$ maximal (Randlösung).
$G(9) = 776$
d.h. der maximale Gewinn beträgt 776 GE.

f) *1. Lösungsweg:*
Preiserhöhung von 120 GE um 1% auf $120 \cdot 1{,}01 = 121{,}20$ GE

p	120	121,20
x	10	9,7

d.h. der Absatz sinkt um 0,3 ME auf 9,7 ME.

2. Lösungsweg über Elastizität:
$x'(p) = -0{,}25$

p	120
$x(p)$	10
$x'(p)$	$-0{,}25$

Elastizität:
$$\varepsilon_x(p) = x'(p) \cdot \frac{p}{x(p)}$$
$$\varepsilon_x(120) = x'(120) \cdot \frac{120}{x(120)} = -0{,}25 \cdot \frac{120}{10} = -3$$
d.h. der Absatz sinkt um 3%.

Aufgabe 4
Ein Unternehmen hat gegenüber einem Kunden die folgenden drei Forderungen:

Fälligkeitstermin	Betrag
31.03.2006	35 000 GE
30.09.2007	50 000 GE
31.12.2009	25 000 GE

a) Die Wirtschaftsprüfung schlägt vor, die drei Forderungen mit dem Barwert in der Bilanz auszuweisen. Mit welchem Betrag geht dann die Summe der drei Forderungen in die Bilanz zum 31.12.2004 ein? Verwenden Sie bei Ihren Berechnungen die relative gemischte Verzinsung und gehen Sie von einem nominellen Jahreszins von 3,5% aus.

b) Am 30.06.2004 wird eine Änderung der Zahlungsmodalitäten vereinbart. Dem Schuldner soll mehr Zeit zur Rückzahlung gegeben werden. Die Rückzahlung erfolgt nun in zwei Beträgen zum 31.12.2008 und zum 31.12.2010. Dabei soll die zweite Zahlung dreimal so hoch sein wie die erste Zahlung. Bestimmen Sie beide Beträge, wenn der Bewertungsstichtag der 30.06.2004 ist. Verwenden Sie bei Ihren Berechnungen die relative gemischte Verzinsung und gehen Sie von einem nominellen Jahreszins von 3,5% aus.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Wert der Forderungen am 31.12.2004

$$\begin{aligned}
& \frac{35\,000}{1{,}035\cdot\left(1+\frac{3}{12}\cdot 0{,}035\right)}+\frac{50\,000}{1{,}035^2\cdot\left(1+\frac{9}{12}\cdot 0{,}035\right)}+\frac{25\,000}{1{,}035^5}\\
= {} & 33\,523{,}10+45\,481{,}64+21\,049{,}33\\
= {} & 100\,054{,}07
\end{aligned}$$

d.h. in die Bilanz zum 31.12.2004 gehen die Forderungen mit einem Betrag von 100 054,07 GE ein.

b) Wert der Forderungen am 30.06.2004

$$\begin{aligned}
& \frac{35\,000}{1{,}035\cdot\left(1+\frac{9}{12}\cdot 0{,}035\right)}+\frac{50\,000}{1{,}035^3\cdot\left(1+\frac{3}{12}\cdot 0{,}035\right)}+\frac{25\,000}{1{,}035^5\cdot\left(1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}035\right)}\\
= {} & 32\,951{,}45+44\,705{,}96+20\,687{,}30\\
= {} & 98\,344{,}71
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
98\,344{,}71 &= \frac{x}{1{,}035^4\cdot\left(1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}035\right)}+\frac{3x}{1{,}035^6\cdot\left(1+\frac{6}{12}\cdot 0{,}035\right)}\\
98\,344{,}71 &= 0{,}8565\cdot x+0{,}7995\cdot 3x\\
98\,344{,}71 &= 0{,}8565\cdot x+2{,}3985\cdot x\\
98\,344{,}71 &= 3{,}254982\cdot x\\
x &= 30\,213{,}5957 \text{ bzw. } 3x=90\,640{,}7870
\end{aligned}$$

d.h. die erste Forderung beträgt 30 213,60 GE und die zweite Forderung beträgt 90 640,80 GE.

Aufgabe 5

Für den Erwerb eines Autos wird folgendes Finanzierungs-Modell angeboten:

- eine Sofortzahlung in Höhe von 5 000 €

- drei Jahre lang monatlich vorschüssige Rückzahlungen in Höhe von 200 €
- eine Restzahlung in Höhe von 4 021,20 € drei Jahre nach Erwerb des Autos

a) Berechnen Sie bei einem Jahreszins von 6% den Barwert des Finanzierungs-Modells.

b) Das Finanzierungs-Modell soll umgewandelt werden in zwei gleichwertige Finanzierungs-Modelle (Jahreszins 6%):

  1. Modell 1:
     - Sofortzahlung von 4 000 €
     - vier Jahre lang gleich hohe vorschüssige Quartalsraten
     - Restzahlung in Höhe von 4 809,92 € vier Jahre nach Erwerb des Autos

     Wie hoch sind die Quartalsraten?
  2. Modell 2:
     Es sollen halbjährlich vorschüssige Rückzahlungen in Höhe von 1 703,80 € geleistet werden. Wie viele Jahre lang sind die vollen Rückzahlungen zu entrichten?

Lösung zu Aufgabe 5

a) Barwert K_0:
$K_0 = 5\,000 + R_0 + \frac{4\,021{,}20}{1{,}06^3} = 5\,000 + R_0 + 3\,376{,}28$
Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:
$r_J = 200 \cdot \left(12 + \frac{13}{2} \cdot 0{,}06\right) = 2\,478$
$R_0 = 2\,478 \cdot \frac{1{,}06^3 - 1}{0{,}06} \cdot \frac{1}{1{,}06^3} = 6\,623{,}72$
$K_0 = 5\,000 + 6\,623{,}72 + 3\,376{,}28 = 15\,000$
d.h. der Barwert beträgt 15 000 €.

b) 1. Modell 1: Zuerst bestimmen wir den Barwert R_0 der unterjährlichen Rente:

$$\begin{aligned} 15\,000 &= 4\,000 + R_0 + \frac{4\,809{,}92}{1{,}06^4} \\ 15\,000 &= 4\,000 + R_0 + 3\,809{,}91 \\ R_0 &= 7\,190{,}09 \end{aligned}$$

Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:
$7\,190{,}09 = r_J \cdot \frac{1{,}06^4 - 1}{0{,}06} \cdot \frac{1}{1{,}06^4} \Rightarrow r_J = 2\,075$

Vorschüssige Quartalsraten r_U:
$2\,075 = r_U \cdot \left(4 + \frac{5}{2} \cdot 0{,}06\right) \Rightarrow r_U = 500$
d.h. die Quartalsraten betragen 500 €.

2. Modell 2: Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:
   $r_J = 1\,703{,}80 \cdot \left(2 + \frac{3}{2} \cdot 0{,}06\right) = 3\,560{,}942$
   Laufzeit:
   $$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{15\,000}{3\,560{,}942} \cdot 0{,}06\right]}{\ln 1{,}06} = 5$$
   d.h. die Raten sind fünf Jahre lang zu zahlen.

Aufgabe 6

Ein Transportproblem wird durch die in der folgenden Tabelle notierten Daten gegeben:

	Kunde I	Kunde II	Kunde III	Verfügbare Lagermenge
Lager 1	7 GE/ME	8 GE/ME	5 GE/ME	4 ME
Lager 2	2 GE/ME	7 GE/ME	3 GE/ME	3 ME
Lager 3	9 GE/ME	5 GE/ME	10 GE/ME	3 ME
Bedarf	2 ME	2 ME	6 ME	

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Vogelschen Approximationsmethode eine Ausgangslösung.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der MODI-Methode eine optimale Lösung. Wie hoch sind die minimalen Transportkosten?

c) Ist die optimale Lösung unter b) eindeutig? (Begründung!)

d) Der Kunde III reduziert kurzfristig seinen Bedarf von 6 ME auf 2 ME. (Die verfügbaren Lagermengen bleiben ebenso wie der Bedarf der Kunden I und II unverändert.)
   Bestimmen Sie mit Hilfe der Nordwest-Eckenregel eine Ausgangslösung.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Überprüfung der Angebots- und Nachfragemengen:
   $$\left.\begin{array}{l}\text{Vorratsmenge} = 10\text{ ME}\\ \text{Bedarfsmenge} = 10\text{ ME}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{okay}$$

	K_1	K_2	K_3	a_i	d_i	
L_1	7	8	5	4	2	3
L_2	2	7	3	$\cancel{3}\,1$	1	4
L_3	9	5	10	$\cancel{3}\,1$	4	$\boxed{5}$
b_j	2	2	6	10		
d_j	$\boxed{5}$	2	2			
	–	2	2			

TP-Plan:

	K_1	K_2	K_3	u_i
L_1	7	8	5 $\boxed{4}$	5
L_2	2 $\boxed{2}$	7	3 $\boxed{1}$	3
L_3	9	5 $\boxed{2}$	10 $\boxed{1}$	10
v_j	-1	-5	$v_3 = 0$	

b) insb. betragen die TP-Kosten 47 GE.

Nichtbasisvariable	Opp.kosten
x_{11}	3
x_{12}	8
x_{22}	9
x_{31}	0

d.h. die Ausgangslösung unter a) ist optimal, jedoch nicht eindeutig.

c) Die Opportunitätskosten unter b) sind alle nicht negativ, deshalb ist die Lösung optimal. Da jedoch die Opportunitätskosten von x_{31} null betragen, ist die gefundene optimale Lösung nicht eindeutig. Es gibt also eine weitere optimale Lösung.

d) Überprüfung der Angebots- und Nachfragemengen:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Vorratsmenge} = 10 \text{ ME}\\ \text{Bedarfsmenge} = 6 \text{ ME}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{nicht gleich}$$

d.h. es muss eine fiktive Bedarfsstelle eingerichtet werden mit einem Bedarf von 4 ME.

Nordwest-Eckenregel:

	K_1	K_2	K_3	$*$
L_1	2	2		
L_2			2	1
L_3				3