Mathematik-Klausur vom 16.4.2004

Aufgabe 1
Die Wucher-Kredit GmbH verleiht Kapital zu einem nominellen Jahreszinsfuß von 20%, wobei sie die anfallenden Kreditzinsen am Ende eines jeden Vierteljahres der Schuld zuschlägt (unterjährliche Verzinsung zum relativen Zins). Ein Privatmann hat bei dieser Gesellschaft am 30. Juni 2003 ein Darlehen über 100 000 € aufgenommen, das er am 31.12.2007 zurückzahlen muss.

a) Wie hoch ist der effektive Jahreszinsfuß dieses Darlehens?

b) Wie hoch ist der Betrag, den der Privatmann am Ende der Laufzeit an die Wucher-Kredit-GmbH zurückzahlen muss?

c) Nach wie vielen vollen Jahren übersteigen die Schulden des Privatmanns zum ersten Mal die 200 000 € Grenze?

d) Angenommen dem Privatmann fließen am 30.9.2005 aus unbekannter Quelle 50 000 € zu, die er unmittelbar an die Wucher-Kredit-GmbH weitergibt, um seinen Rückzahlungsbetrag am 31.12.2007 zu reduzieren. Wie hoch werden seine Schulden am Ende der Laufzeit dann noch sein?

Aufgabe 2
Jemand zahlt bei 4% Zinsen p.a. im Zeitraum vom 1.1.2000 bis 31.12.2005 jeweils zu Beginn eines Monats 200 € und im Zeitraum vom 1.1.2006 bis 31.12. 2008 jeweils zu Beginn eines Quartals 750 € auf ein Konto ein.

a) Wie hoch ist der Kontostand am 31.12.2005?

b) Wie hoch ist das Guthaben am 31.12.2008?

c) Wie oft kann er anschließend eine regelmäßige jährliche vorschüssige Rente über 2000 € beziehen, deren erster Betrag fällig ist am 1.1.2011?

Aufgabe 3
Ein Unternehmen arbeitet mit folgender linearen Preis-Absatz Funktion:

$$x(p) = 20 - 0{,}25p; \;\; p \in [0; 80]$$
(x = Absatzmenge, p = Preis pro Mengeneinheit)

Die Gesamtkosten ergeben sich aus der Produktionsmenge x durch:

$$K(x) = 10x + 70; \;\; x \in [0; 20]$$

a) Berechnen Sie die Gewinnfunktion und geben Sie den zugehörigen Definitionsbereich an.

b) Geben Sie die Gewinn- und Verlustzonen an. (Die Lösung ist auf zwei Stellen hinter dem Komma zu runden.)

c) Berechnen Sie den maximalen Gewinn. (Die Lösung ist auf zwei Stellen hinter dem Komma zu runden.)

d) Bestimmen Sie das Betriebsoptimum, d. h. die Produktionsmenge mit minimalen Stückkosten (durchschnittlichen Gesamtkosten).

Aufgabe 4

Ein Fahrradhändler möchte zwei neue Fahrradmarken A und B in sein Sortiment aufnehmen. Für das kommende Jahr möchte er dafür höchstens 45 000 € investieren. Außerdem soll die Zahl x_A der Fahrräder der Fahrradmarke A höchstens so groß sein wie die Zahl x_B der Fahrräder der Fahrradmarke B.
Ein Fahrrad der Fahrradmarke A kostet den Händler 450 €, eines von der Fahrradmarke B 300 €.
Der Nettogewinn für ein Fahrrad der Fahrradmarke A beträgt 120 € und für ein Fahrrad der Fahrradmarke B 80 €.
Wie viele Fahrräder der beiden Fahrradmarken soll der Händler einkaufen, damit er einen maximalen Gewinn erzielt?

a) Stellen Sie das mathematische Modell auf.

b) Lösen Sie das mathematische Modell mit Hilfe des Simplex-Algorithmus.

c) Das lineare Optimierungsmodell hat weitere optimale Lösungen. Bestimmen Sie mit Hilfe des Simplex-Algorithmus, ausgehend von dem optimalen Tableau unter b), eine weitere optimale Lösung.

d) Warum kann die weitere optimale Lösung $x_A = 20$ und $x_B = 120$ und $Z = 12\,000$ € nicht mit dem Simplex-Algorithmus bestimmt werden?

Aufgabe 5

Die Matrizen A und B sind durch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Matrix B die Inverse zur Matrix A ist.

b) Berechnen Sie für A und B: $(A + B)(A - B)$

c) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösungen:

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $K_1 = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}2}{4}\right)^4 = 100\,000 \cdot 1{,}05^4 = 100\,000 \cdot 1{,}2155 = 121\,550,63$

d.h. der effektive Jahreszins beträgt 21,55%.

b) Laufzeit:

2003	2 Quartale
2004	4 Quartale
2005	4 Quartale
2006	4 Quartale
2007	4 Quartale
$\sum$	18 Quartale = 4,5 Jahre

$K_{4,5} = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}2}{4}\right)^{4\cdot 4{,}5} = 100\,000 \cdot 1{,}05^{18} = 240\,661{,}92$

d.h. er muss 240 661,92 € zurückzahlen.

c) n= Laufzeit in Jahren =?

$$\begin{aligned}
200\,000 &= 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}2}{4}\right)^{4\cdot n} && \mid \div 100\,000 \\
2 &= 1{,}05^{4\cdot n} && \mid \text{Logarithmus} \\
4\cdot n &= \log_{1{,}05} 2 && \mid \text{Umrechnungsformel} \\
4\cdot n &= \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} = 14{,}207 && \mid \div 4 \\
n &= 3{,}55
\end{aligned}$$

d.h. nach vier vollen Jahren wird erstmals der Betrag von 200 000 € überschritten.

d) Die Rückzahlung über 50 000 GE wird $2\frac{1}{4}$ Jahre nach Kreditaufnahme getätigt.

$240\,661{,}92 - 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}2}{4}\right)^{4\cdot 2{,}25} = 240\,661{,}92 - 50\,000 \cdot 1{,}05^9 = 163\,095{,}51$

d.h. er muss 163 095,51 zurückzahlen.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) $r_J = 200(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) = 2\,452$

$R_6 = 2\,452 \cdot \frac{1{,}04^6 - 1}{0{,}04} = 16\,264{,}06$

d.h. der Kontostand am 31.12.2005 beträgt 16 264,06 €.

b) $16\,264{,}06 \cdot 1{,}04^3 = 18\,294{,}85$

$r_J = 750(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}04) = 3\,075$

$R_3 = 3075 \cdot \frac{1{,}04^3 - 1}{0{,}04} = 9598{,}92$

$K_9 = 18\,294{,}85 + 9598{,}92 = 27\,893{,}77$

d.h. das Guthaben am 31.12.2008 beträgt 27 893,77 €.

c) $27\,893{,}77 \cdot 1{,}04^2 = 30\,169{,}90$

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{30\,169{,}90}{1{,}04 \cdot 2\,000} \cdot 0{,}04\right]}{\ln 1{,}04} = 22{,}13$$

d.h. 22 Jahre lang können die vollen Beträge ausgezahlt werden.

Lösung zu Aufgabe 3:

a)
$$\begin{aligned} x &= 20 - 0{,}25p \\ x + 0{,}25p &= 20 \\ 0{,}25p &= 20 - x \\ p &= 80 - 4x \end{aligned}$$

d.h. $p(x) = 80 - 4x; \quad x \in [0; 20]$

$$\begin{aligned} U(x) &= p(x) \cdot x = 80x - 4x^2 \\ G(x) &= U(x) - K(x) = -4x^2 + 70x - 70; \quad x \in [0; 20] \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 0 &= -4x^2 + 70x - 70 \qquad |: (-4) \\ 0 &= x^2 - 17{,}5 + 17{,}5 \\ x &= 8{,}75 \pm \sqrt{76{,}5625 - 17{,}5} = 8{,}75 \pm \sqrt{59{,}0625} = 8{,}75 \pm 7{,}6852 \\ x &= 16{,}44 \text{ oder } x = 1{,}07 \end{aligned}$$

$G(0) = -70$

d.h. Verlustzone $= [0; 1{,}07) \cup (16{,}44; 20]$

Gewinnzone $= (1{,}07; 16{,}44)$

c) $0 = G'(x) = -8x + 70 \Rightarrow x = 8{,}75$

$G''(x) = -8 <_{\text{immer}} 0$

d.h. $x = 8{,}75$ glob. Max.

$G(8{,}75) = 236{,}25$

d.h. der maximale Gewinn beträgt 236,25 GE.

d) Stückkosten

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = 10 + \frac{70}{x}; \quad x \in (0; 20]$$

d.h. die Stückkosten sind minimal am Rand $x = 20$.

Lösung von Aufgabe 4:

x_A = ME von Fahrrädern der Sorte A

x_B = ME von Fahrrädern der Sorte B

a)
$$\begin{aligned} \text{I} \quad 450x_A + 300x_B &\leq 45\,000 \\ \text{II} \quad x_A - x_B &\leq 0 \qquad \text{da } x_A \leq x_B \end{aligned}$$

$120x_A + 80x_B \stackrel{!}{=}$ maximal; $x_A, x_B \geq 0$

b) Simplex-Algorithmus

1	x_A	x_B	
e_1	450	300	45 000
e_2	$\boxed{1}$	-1	0
	-120	-80	0

2	e_2	x_B	
e_1	-450	$\boxed{750}$	45 000
x_A	1	-1	0
	120	-200	0

3	e_2	e_1	
x_B	$-3/5$	$1/750$	60
x_A	$2/5$	$1/750$	60
	0	$4/15$	12 000

Optimale Lösung: $\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ \hline e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Optimaler Z-Wert = 12 000

d.h. um einen maximalen Gewinn von 12 000 € zu erzielen, sind von beiden Fahrradmarken jeweils 60 ME einzukaufen (und abzusetzen).

c) weitere optimale Lösung:

3	e_2	e_1	
x_B	$-3/5$	$1/750$	60
x_A	$\boxed{2/5}$	$1/750$	60
	0	$4/15$	12 000

4	x_A	e_1	
x_B	$3/2$	$1/300$	150
e_2	$5/2$	$1/300$	150
	0	$4/15$	12 000

d.h. eine weitere optimale Lösung ist $x_A = 0$ und $x_B = 150$.

d) Die optimale Lösung des Simplex-Algorithmus ist stets ein Eckpunkt des zulässigen Bereichs. Findet der Simplex-Algorithmus z.B. zwei optimale Lösungen, so lassen sich alle weiteren optimalen Lösungen, die auf der Gerade zwischen diesen beiden Eckpunkten liegen, nicht mit Hilfe des Simplex-Algorithmus bestimmen.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d.h. B ist die Inverse zu A.

b) $(A + B) \cdot (A - B) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & 6 \\ 6 & 12 & 3 \end{bmatrix}$

c)

Zeile							Operation
1	$\boxed{1}$	2	2	1	0	0	
2	0	1	1	0	1	0	
3	1	0	1	0	0	1	
4	1	2	2	1	0	0	1
5	0	$\boxed{1}$	1	0	1	0	2
6	0	−2	−1	−1	0	1	3 − 1
7	1	2	2	1	0	0	4
8	0	$\boxed{1}$	1	0	1	0	5
9	0	0	1	−1	2	1	6 + 2 · 5
10	1	0	0	1	−2	0	7 − 2 · 8
11	0	1	1	0	1	0	8
12	0	0	$\boxed{1}$	−1	2	1	9
13	1	0	0	1	−2	0	10
14	0	1	0	1	−1	−1	11 − 12
15	0	0	1	−1	2	1	12

d.h. $A^{*^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$