Mathematik-Klausur vom 25.4.2003

Aufgabe 1

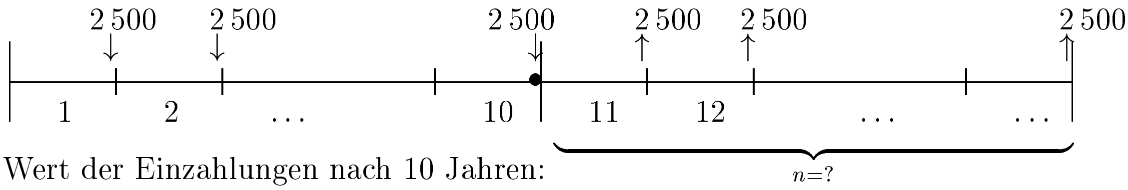
a) Wie lange kann ein Sparer, der zehn Jahre lang jeweils zum Jahresende 2 500 € eingezahlt hat, den gleichen Betrag jeweils wieder am Ende des Jahres abheben (die erste Abhebung liegt ein Jahr nach der letzten Einzahlung), wenn die Bank einen Zins von 4,5% p.a. gewährt? (Anzugeben ist die Anzahl der vollen Abhebungen)

b) Welche vorschüssigen monatlichen Einzahlungen muss man leisten, um am Ende des Jahres den Jahresbetrag von 2 500 € zu erreichen? (Zins 4,5% p.a.)

c) Ein anderer Sparer baut ein Guthaben zu gleichen Konditionen wie oben (also 2 500 € jährlich nachschüssig zu 4,5% Zins p.a.) über sechzehn Jahre auf. Welchen Betrag darf der Sparer zum Ende des 16. Jahres abheben, damit er sofort anschließend 20-mal zum Jahresende 2 500 € abheben kann? (Zins 4,5% p.a.)

Lösung:

a) Einzahlungen und Auszahlungen:



Wert der Einzahlungen nach 10 Jahren:

$$R_{10} = 2\,500 \cdot \frac{1{,}045^{10} - 1}{0{,}045} = 30\,720{,}52$$

Laufzeit der Rückzahlungen:

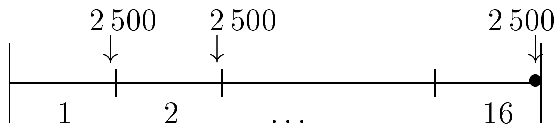
$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{30\,720{,}52}{2\,500} \cdot 0{,}045\right]}{\ln 1{,}045} = 18{,}29$$

d.h. volle Rückzahlungen können 18 Jahre lang erfolgen.

b) $2\,500 = r_M(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}045) \Rightarrow r_M = 203{,}38$

d.h. monatlich sind 203,38 € einzuzahlen.

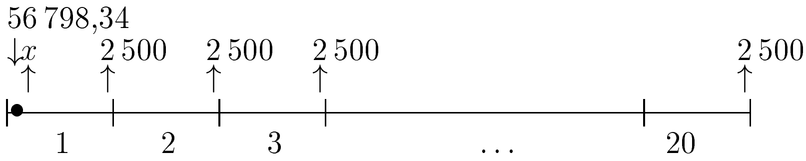
c) Einzahlungen:



Wert der Einzahlungen nach 16 Jahren:

$$R_{16} = 2\,500 \cdot \frac{1{,}045^{16} - 1}{0{,}045} = 56\,798{,}34$$

Rückzahlung x



Barwert der Rückzahlungen:

$$56\,798{,}34 - x = 2\,500 \cdot \frac{1{,}045^{20} - 1}{0{,}045} \cdot \frac{1}{1{,}045^{20}} = 32\,519{,}84 \Rightarrow x = 24\,278{,}50$$

d.h. er darf 24 278,50 € abheben.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Hinweis: Die Ergebnisse sind <u>nicht</u> ganzzahlig.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 9 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$.

Zeigen Sie, dass keine Lösung des Gleichungssystems die Bedingung $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ erfüllt.

Lösung:

a) Vollständige Elimination

Zeile							Operation
1	$\boxed{1}$	1	0	1	0	0	
2	3	5	2	0	1	0	
3	2	1	1	0	0	1	
4	1	1	0	1	0	0	1
5	0	2	2	-3	1	0	2 $-3 \cdot$ 1
6	0	$\boxed{-1}$	1	-2	0	1	3 $-2 \cdot$ 1
7	1	1	0	1	0	0	4
8	0	$\boxed{1}$	-1	2	0	-1	$-$ 6
9	0	0	4	-7	1	2	5 $+2 \cdot$ 6

Bis hier wurde der Gauß-Algorithmus gerechnet.
Jetzt erzeugen wir die Null über dem Pivotelement $\boxed{1}$

10	1	0	1	-1	0	1	7 - 8
11	0	1	-1	2	0	-1	8
12	0	0	$\boxed{4}$	-7	1	2	9

Jetzt erzeugen wir die Null über dem Pivotelement $\boxed{4}$

13	4	0	0	3	-1	2	$4 \cdot$ 10 - 12
14	0	4	0	1	1	-2	$4 \cdot$ 11 + 12
15	0	0	4	-7	1	2	12

Jetzt formen wir alle Pivotelemente zu Einsen um.

16	1	0	0	$3/4$	$-1/4$	$1/2$	13 $\div 4$
17	0	1	0	$1/4$	$1/4$	$-1/2$	14 $\div 4$
18	0	0	1	$-7/4$	$1/4$	$1/2$	15 $\div 4$

Also ist $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \\ -7/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$

b) Gaußalgorithmus

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	$\boxed{3}$	2	-2	4	
2	9	9	1	-6	
3	3	2	-2	4	1
4	0	3	7	-18	2 $-3 \cdot$ 1

4 $$\begin{aligned} 3x_2 + 7x_3 &= -18 \\ 3x_2 &= -18 - 7x_3 \\ x_2 &= -6 - \frac{7}{3}x_3 \end{aligned}$$

3 $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 &= 4 - 2x_2 + 2x_3 = 4 - 2(-6 - \frac{7}{3}x_3) + 2x_3 \\ 3x_1 &= 16 + \frac{20}{3}x_3 \\ x_1 &= \frac{16}{3} + \frac{20}{9}x_3 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{16}{3} + \frac{20}{9}x_3 \\ -6 - \frac{7}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

1. $x_1 \geq 0$ d.h. $\frac{16}{3} + \frac{20}{9}x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \geq \frac{9}{20} \cdot -\frac{16}{3} = -2{,}4$
2. $x_2 \geq 0$ d.h. $-6 - \frac{7}{3}x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq -\frac{3}{7} \cdot 6 = -2{,}5714$
3. $x_3 \geq 0$

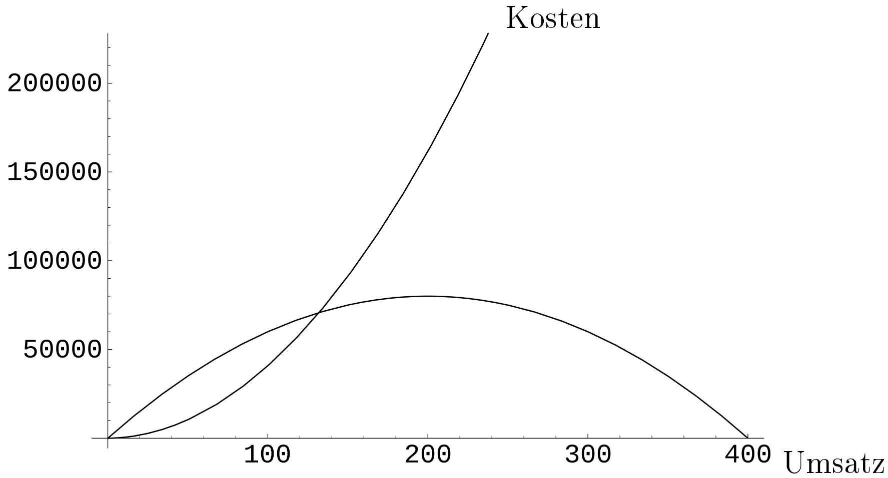
Also soll insbesondere x_3 kleiner als -2,5714 sein und gleichzeitig größer als 0 sein. Das ist nicht möglich.
d.h. es gibt keine Lösung für $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Aufgabe 3
In einem Ein-Produkt-Unternehmen wird für die Produktion des einzigen Produkts ein Produktionsfaktor eingesetzt. Die eingesetzte Menge (in Stück) dieses Produktionsfaktors wird mit r bezeichnet. Die Produktionsmenge x des Produkts (in Stück) ist abhängig von der eingesetzten Menge des Produktionsfaktors. Die Abhängigkeit lässt sich als Funktion wie folgt darstellen:

$$x(r) = \sqrt{r} - 1; r \geq 1$$

Für jedes Stück des Produktionsfaktors fallen 4 € an Kosten an. Weitere Kosten entstehen dem Unternehmen für die Produktion des Produkts nicht. Die Kapazitätsgrenze des Unternehmens liegt bei 400 Stück. Die Umsatzfunktion (Erlösfunktion) des Unternehmnes lautet:

$$U(x) = 800x - 2x^2; x \in [0; 400]$$



a) Zeigen Sie, dass sich für die Kostenfunktion $K(x) = 4x^2 + 8x + 4; x \in [0; 400]$ ergibt.

b) Bestimmen Sie den Bereich, in dem der Gewinn positiv ist (Gewinnzone).

c) Bestimmen Sie die Menge x des Produkts, die zum Gewinn-Maximum führt.

d) Wie hoch ist der Gewinn im Gewinn-Maximum?

e) Berechnen und interpretieren Sie die Grenzkosten an der Stelle $x = 66$.

Lösung:
x=produzierte und abgesetzte Menge (in Stück) des Gutes
r=eingesetzte Menge (in Stück) des Produktiuonsfaktors Produktionsfunktion $x(r) = \sqrt{r} - 1; r \geq 1$
Kosten $K(r) = 4 \cdot r$
Umsatz $U(x) = 800x - 2x^2; x \in [0; 400]$

a) $K(x) = ?$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r}-1 \\ x+1 &= \sqrt{r} \\ (x+1)^2 &= r \end{aligned}$$

$K(x) = 4 \cdot r = 4 \cdot (x+1)^2 = 4x^2 + 8x + 4$
d.h. die Kostenfunktion lautet $K(x) = 4x^2 + 8x + 4; x \in [0; 400]$

b) $G(x) = U(x) - K(x) = (800x - 2x^2) - (4x^2 + 8x + 4) = -6x^2 + 792x - 4; x \in [0; 400]$

$$\begin{aligned} 0 &= -6x^2 + 792x - 4 \\ 0 &= x^2 - 132 + 2/3 \\ x &= 66 \pm \sqrt{4356 - 2/3} = 66 \pm 65{,}9949 \\ x &= 0{,}0051 \text{ oder } x = 131{,}9949 \end{aligned}$$

$G(1) = 782$
d.h. die Gewinnzone ist das Intervall (0,0051 ; 131,9949)

c) $G'(x) = -12x + 792$
$G''(x) = -12$
Notwendige Bedingung: $0 = -12x + 792 \Rightarrow x = 66$
Hinreichende Bedingung: $G''(x) <_{\text{immer}} 0$
d.h. $G(x)$ hat in $x = 66$ ein globales Maximum.

d) $G(66) = 26\,132$
d.h. der maximale Gewinn beträgt 26 132 €.

e) $K'(x) = 8x + 8 \Rightarrow K'(66) = 536$
d.h. werden statt 66 ME jetzt 67 ME produziert, so steigen die Kosten um etwa 536 €.

Aufgabe 4
Bestimmen Sie den lokalen (streng relativen) Extremwert der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2^2 \quad ; \qquad x_1 > 0; x_2 > 0$$

unter der Nebenbedingung:

$$x_1 + x_2 = 2$$

a) Führen Sie die Berechnung mit der Substitutions-Methode (Einsetzungsverfahren) durch (notwendige und hinreichende Bedingung.)

b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und führen Sie die Berechnung mit dem Lagrange-Verfahren durch (nur notwendige Bedingung).

Lösung:

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2^2 \overset{!}{=} \text{max.}$ unter NB $x_1 + x_2 = 2 \;\; ; x_1 > 0; x_2 > 0$
$x_2 = 2 - x_1$
Setze $h(x_1) = x_1^2 \cdot (2 - x_1)^2 = x_1^4 - 4x_1^3 + 4x_1^2$
$h'(x_1) = 4x_1^3 - 12x_1^2 + 8x_1$
$h''(x_1) = 12x_1^2 - 24x_1 + 8$

Notwendige Bedingung:
$0 = 4x_1^3 - 12x_1^2 + 8x_1 = 4x_1(x_1^2 - 3x_1 + 2)$
$x_1 = 0$ oder $0 = x_1^2 - 3x_1 + 2$
$x_1 = 0$ oder $x_1 = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 2} = 1{,}5 \pm \sqrt{0{,}25} = 1{,}5 \pm 0{,}5$
$x_1 = 0$ oder $x_1 = 1$ oder $x_1 = 2$
d.h. mögliche Extremstellen sind (0;2) und (1;1) und (2;0).
Da gemäß Definitionsbereich sowohl $x_1 > 0$ als auch $x_2 > 0$ gelten muss, ist (1;1) der einzige Kandidat für eine Extremstelle.

Hinreichende Bedingung: $h''(1) = -4 < 0$
d.h. (1;1) ist ein lokales Maximum von $f(x_1, x_2)$ unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

b) $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2)$
Ableitungen:
$L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1x_2^2 + \lambda$
$L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1^2x_2 + \lambda$
$L_\lambda(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + x_2 - 2$
Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{rrcllcrl}
\text{I} & 0 & = & 2x_1x_2^2 + \lambda & \Rightarrow & & \lambda & = -2x_1x_2^2 \\
\text{II} & 0 & = & 2x_1^2x_2 + \lambda & \Rightarrow & & \lambda & = -2x_1^2x_2 \\
\text{III} & 0 & = & x_1 + x_2 - 2 & \Rightarrow & & x_2 & = 2 - x_1 \\
\hline
\text{I=II} & -2x_1x_2^2 & = & -2x_1^2x_2 & & & & \\
 & -2x_2 & = & -2x_1 & \text{oder } x_1 = 0 & \text{oder} & x_2 = 0 & \\
 & x_1 & = & x_2 & \text{oder } x_1 = 0 & \text{oder} & x_2 = 0 &
\end{array}$$

Gemäß Definitionsbereich entfallen die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$. Für $x_1 = x_2$ gilt weiter:
III $x_2 = 2 - x_1 = 2 - x_2 \Rightarrow 2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$
d.h. (1;1) ist eine mögliche Extremstelle.

Aufgabe 5

Im Rahmen eines Flächen-Stilllegungs-Programms in der Landwirtschaft beschließt ein Landwirt, x_1 Hektar Wiesenland und x_2 Hektar Ackerland unter folgenden Bedingungen brach liegen zu lassen:

1. Insgesamt will er höchstens 90 Hektar Land brach liegen lassen.
2. Aus betrieblichen Gründen sollen höchstens 35 Hektar Wiesenland brach liegen.
3. Die brach liegende Ackerfläche darf höchstens doppelt so groß wie die brach liegende Wiesenfläche sein.

Für die Stilllegung eines Hektars Wiesenland bekommt der Landwirt 300 €, für die Stilllegung eines Hektars Ackerland 450 € Prämie im Jahr.

Wie viele Hektar Wiesenland und wie viele Hektar Ackerland müssen brach gelegt werden, damit die größte Prämie insgesamt im Jahr erzielt wird?

a) Stellen Sie ein mathematisches Modell auf.

b) Berechnen Sie die Flächen und die gesamte Prämie mit Hilfe des Simplex-Algorithmus.

Lösung:
x_1 = brach liegendes Wiesenland (in ha)
x_2 = brach liegendes Ackerland (in ha)

a)
$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 + x_2 & \leq & 90 \\ \text{II} & x_1 & \leq & 35 \\ \text{III} & x_2 & \leq & 2x_1 \Rightarrow -2x_1 + x_2 \leq 0 \end{array}$$

$300x_1 + 450x_2 \stackrel{!}{=} \max \; ; x_1, x_2 \geq 0$

b) Simplex-Algorithmus

	x_1	x_2	
e_1	1	1	90
e_2	1	0	35
e_3	−2	$\boxed{1}$	0
	−300	−450	0

	x_1	e_3	
e_1	$\boxed{3}$	−1	90
e_2	1	0	35
x_2	−2	1	0
	−1200	450	0

	e_1	e_3	
x_1	1/3	−1/3	30
e_2	−1/3	1/3	5
x_2	2/3	1/3	60
	400	50	36 000

Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \end{pmatrix}$

optimaler Zielfunktionswert = 36 000
d.h. liegen im Jahr 30 ha Wiesenland und 60 ha Ackerland brach, so wird eine maximale Prämie von 36 000 € erzielt.