Mathematik-Klausur vom 29.9.2003

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie die erste Ableitung der beiden folgenden Funktionen:

$$f(x) = 3x^4 + 7x^3 - 3x^2 + \ln(x) + 10; \quad x > 0$$
$$h(x) = e^x \cdot \sqrt{x}; \quad x > 0$$

b) Untersuchen Sie die folgende Funktion auf streng relative Extremwerte (lokale Extremwerte) und Sattelpunkte (Sattelstellen):

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + 2y^2 + 12x + 16y + 25; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

c) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}$$

Lösung:

a) $f'(x) = 12x^3 + 21x^2 - 6x + \dfrac{1}{x}$

$h'(x) = e^x \cdot \sqrt{x} + e^x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $f_x(x, y) = 2x + 4y + 12$
$f_y(x, y) = 4x + 4y + 16$
$f_{xx}(x, y) = 2$
$f_{yy}(x, y) = 4$
$f_{xy}(x, y) = 4$

Notwendige Bedingung

$$\begin{array}{ccccl} \mathrm{I} & 0 & = & 2x + 4y + 12 \\ \mathrm{II} & 0 & = & 4x + 4y + 16 \\ \hline \mathrm{I} - \mathrm{II} & 0 & = & -2x - 4 \Rightarrow x = -2 \\ \mathrm{I} & 0 & = & -4 + 4y + 12 \Rightarrow y = -2 \end{array}$$

Hinreichende Bedingung

$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = 2 \cdot 4 - 4^2 = -8 < 0$

d.h. es liegen keine Extremstellen vor und
$(x, y) = (-2; -2)$ ist eine Sattelstelle.

c) Gaußalgorithmus

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	$\boxed{1}$	2	1	2	
2	3	1	2	5	
3	4	2	1	5	
4	1	2	1	2	1
5	0	$\boxed{5}$	1	1	$3 \cdot$ 1 $-$ 2
6	0	6	3	3	$4 \cdot$ 1 $-$ 3
7	1	2	1	2	4
8	0	5	1	1	5
9	0	0	9	9	$5 \cdot$ 6 $- 6 \cdot$ 5

$$\begin{array}{lrl} 9 & 9x_3 & = 9 \Rightarrow x_3 = 1 \\ 8 & 5x_2 + x_3 & =1 \\ & 5x_2 + 1 & =1 \Rightarrow x_2 = 0 \\ 7 & x_1 + 2x_2 + x_3 & =2 \\ & x_1 + 0 + 1 & =2 \Rightarrow x_1 = 1 \end{array}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2

Ein Beamter, der ein monatlich vorschüssiges Gehalt von 4000 € bezieht, wird nach seiner Pensionierung davon 75% als monatlich vorschüssiges Ruhegehalt bekommen.

a) Welchen Barwert hat diese Ruhegehaltszahlung, wenn davon ausgegangen wird, dass der Beamte die Zahlungen genau 10 Jahre erhält und ein Jahreszins von 4% zu Grunde gelegt wird?

b) Berechnen Sie den Barwert der Ruhegehaltszahlung, wenn von seinem monatlich vorschüssigen Gehalt von 4000 € nach seiner Pensionierung nur 70% als Ruhegehalt gewährt werden (monatlich vorschüssig, Laufzeit 10 Jahre, Jahreszins 4%).

c) Berechnen Sie den Barwert der Ruhegehalzszahlung, wenn nach der Pensionierung für das erste Jahr 75%, für das zweite Jahr 74%, für das dritte Jahr 73%, für das vierte Jahr 72%, für das fünfte Jahr 71% und für das sechste bis zehnte Jahr 70% seines derzeitigen Gehaltes von 4000 € gewährt werden (monatlich vorschüssig, Laufzeit 10 Jahre, Jahreszins 4%).

Lösung:

a) Unterjährliche Rente r_U:
$r_U = 4000 \cdot 0{,}75 = 3000$
Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$r_J = 3000 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) = 3000 \cdot 12{,}26 = 36\,780$

Barwert der nachschüssigen jährlichen Ersatzrente:
$R_0 = 36\,780 \cdot \dfrac{1{,}04^{10}-1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^{10}} = 36\,780 \cdot 8{,}1109 = 298\,318{,}75$
d.h. der Barwert beträgt 298 318,75 €.

b) Unterjährliche Rente r_U:
$r_U = 4000 \cdot 0{,}70 = 2800$
Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$r_J = 2800 \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) = 34\,328$
Barwert der nachschüssigen jährlichen Ersatzrente:
$R_0 = 34\,328 \cdot \dfrac{1{,}04^{10}-1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^{10}} = 34\,328 \cdot 8{,}1109 = 278\,430{,}83$
d.h. der Barwert beträgt 278 430,83 €.
oder
$\dfrac{0{,}70}{0{,}75} \cdot 298\,318{,}75 = 278\,430{,}83$

c)

Zeit	monatlich vorschüssige Rente	nachschüssige jährliche Ersatzrente
1. Jahr	$4000 \cdot 0{,}75 = 3000$	$3000 \cdot 12{,}26 = 36\,780{,}00$
2. Jahr	$4000 \cdot 0{,}74 = 2960$	$2960 \cdot 12{,}26 = 36\,289{,}60$
3. Jahr	$4000 \cdot 0{,}73 = 2920$	$2920 \cdot 12{,}26 = 35\,799{,}20$
4. Jahr	$4000 \cdot 0{,}72 = 2880$	$2880 \cdot 12{,}26 = 35\,308{,}80$
5. Jahr	$4000 \cdot 0{,}71 = 2840$	$2840 \cdot 12{,}26 = 34\,818{,}40$
6. - 10. Jahr	$4000 \cdot 0{,}70 = 2800$	$3000 \cdot 12{,}26 = 34\,328{,}00$

Barwert:
$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{36\,780}{1{,}04} + \frac{36\,289{,}60}{1{,}04^2} + \frac{36\,799{,}20}{1{,}04^3} + \frac{35\,308{,}80}{1{,}04^4} + \frac{34\,818{,}40}{1{,}04^5} \\ &\quad + 34\,328 \cdot \frac{1{,}04^5-1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^{10}} \\ &= 159\,542{,}8 + 125\,608{,}67 \\ &= 285\,151{,}47 \end{aligned}$$
d.h. der Barwert beträgt 285 151,47 €.

Aufgabe 3
Ein Haus steht für 300 000 € zum Verkauf. Eine Familie möchte dieses Haus erwerben und nimmt dazu einen Kredit unter den folgenden Bedingungen auf:

- 100 000 € Eigenkapital werden eingesetzt
- Annuitäten-Tilgung in Höhe von 16 000 €
  Der erste Rückzahlungsbetrag ist fällig ein Jahr nach Kreditaufnahme
- Zinsen betragen 7% p.a.

a) Wie viele volle Annuitäten sind zu zahlen?

b) Wie hoch ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

c) Geben Sie die Tilgungsplanzeile für das 27. Jahr an.

Lösung:
Kredit = Kaufpreis − Eigenkapital = 300 000 − 100 000 = 200 000

a) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{200\,000}{16\,000} \cdot 0{,}07\right]}{\ln 1{,}07} = 30{,}7$
d.h. es sind 30 volle Annuitäten zu zahlen.

b) $K_{30} = 200\,000 \cdot 1{,}07^{30} - 16\,000 \cdot \dfrac{1{,}07^{30} - 1}{0{,}07} = 11\,078{,}43$
$11\,078{,}43 \cdot 1{,}07 = 11\,853{,}92$
d.h. ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität beträgt die Restschuld 11 853,92 €.

c) Restschuld am Ende des 26. Jahres:
$K_{26} = 200\,000 \cdot 1{,}07^{26} - 16\,000 \cdot \dfrac{1{,}07^{26} - 1}{0{,}07} = 62\,647{,}06$
$Z_{27} = K_{26} \cdot 0{,}07 = 4\,385{,}29$
$T_{27} = A - Z_{27} = 11\,614{,}71$
$K_{27} = K_{26} - T_{27} = 51\,032{,}35$

Jahr	Zinsen am Ende d.J.	Tilgung am Ende d.J.	Annuität am Ende d.J.	Schuld am Ende d.J.
27	4 385,29	11 614,71	16 000	51 032,35

Aufgabe 4
Ein Bauunternehmen beabsichtigt, zwei Typen von Reihenhäusern zu bauen, einen kleineren Typ K und einen größeren Typ G. Es rechnet mit einer Bauzeit von zwei Jahren und damit, dass es sofort Käufer für die fertig gestellten Reihenhäuser findet. Folgende Daten wurden ermittelt:

Pro Reihenhaus	Typ K	Typ G
Baukosten 1. Jahr	100 000 €	100 000 €
Baukosten 2. Jahr	60 000 €	100 000 €
Gewinn	10 000 €	20 000 €

Im ersten Jahr stehen maximal 800 000 €, im zweiten Jahr maximal 600 000 € zur Verfügung. Wie viele Reihenhäuser von Typ K und/oder Typ G müssen fertig gestellt werden, damit der Gewinn maximal wird?

a) Formulieren Sie ein lineares Optimierungsproblem.

b) Bestimmen Sie die optimale Lösung mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

c) Wie ist das zur Verfügung stehende Kapital mindestens zu erhöhen, wenn vier Reihenhäuser von Typ K und vier Reihenhäuser von Typ G nachgefragt werden und die Nachfrage erfüllt werden soll?

d) Unter der Bedingung, dass für beide Bauabschnitte 1 400 000 € zur Verfügung stehen, die beliebig auf die beiden Jahre verteilt werden können, sei das lineare Optimierungsproblem aus a) zu modifizieren. Formulieren Sie dieses modifizierte lineare Optimierungsproblem. Wie sieht das Gewinn-maximale Bauprogramm, bestehend aus Typ K und/oder Typ G dann aus?
Auf Zinsbetrachtungen wird bei dieser Aufgabe aus Vereinfachungsgründen verzichtet.

Lösung:
$x =$ Anzahl der RH Typ K
$y =$ Anzahl der RH Typ G

a) $10\,000x + 20\,000y \stackrel{!}{=}$ maximal; $x, y \geq 0$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 100\,000x + 100\,000y & \leq & 800\,000 \\ \text{II} & 60\,000x + 100\,000y & \leq & 600\,000 \end{array}$$

b) Simplexalgorithmus

1	x	y	
e_1	100 000	100 000	800 000
e_2	60 000	$\boxed{100\,000}$	600 000
	−10 000	−20 000	0

2	x	e_2	
e_1	40 000	−1	200 000
y	0,6	0,000 01	6
	2 000	0,2	120 000

Optimale Lösung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \hline e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ \hline 200\,000 \\ 0 \end{pmatrix}$ Optimaler Z-Wert $= 120\,000$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 100\,000 \cdot 4 + 100\,000 \cdot 4 & = & 800\,000 \quad \text{okay} \\ \text{II} & 60\,000 \cdot 4 + 100\,000 \cdot 4 & = & 640\,000 = 600\,000 + 40\,000 \end{array}$$

d.h. im 2. Jahr sind zusätzlich 40 000 € an Baukosten zur Verfügung zu stellen.

d) $10\,000x + 20\,000y \stackrel{!}{=}$ maximal; $x, y \geq 0$
unter NB $160\,000x + 200\,000y \leq 1\,400\,000$

Simplexalgorithmus

1	x	y	
e_1	160 000	$\boxed{200\,000}$	1 400 000
	−10 000	−20 000	0

2	x	e_1	
y	0,8	0,000 005	7
	4 000	0,1	140 000

Optimale Lösung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \hline e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ \hline 0 \end{pmatrix}$ Optimaler Z-Wert $= 140\,000$

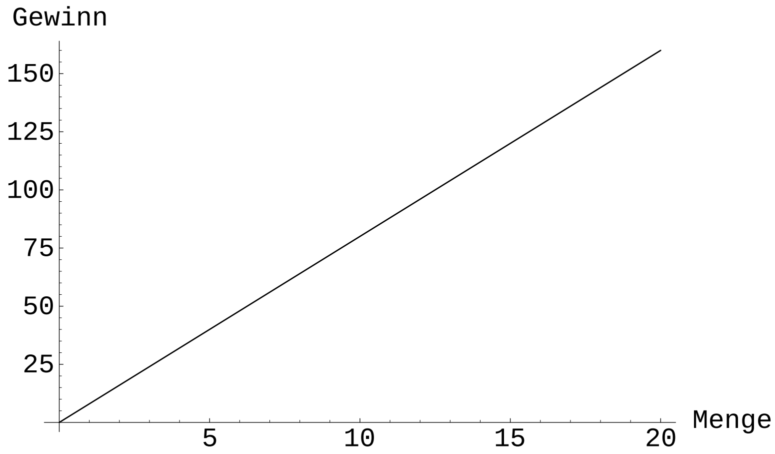
d.h. um den maximalen Gewinn von 140 000 € zu erzielen, sind sieben Reihenhäuser vom Typ G und kein Reihenhaus vom Typ K zu bauen.

Aufgabe 5
Ein Unternehmen produziert aus einem Rohstoff R ein Gut G. Der Zusammenhang zwischen der eingesetzten Rohstoffmenge r und den produzierten Mengeneinheiten von Gut G - im Folgenden mit x bezeichnet - ist durch folgende Produktionsfunktion gegeben:

$$x(r) = 2 \cdot r; \;\; r \geq 0$$

Eine Mengeneinheit von Gut G erzielt am Markt einen Preis von zehn Geldeinheiten, eine Mengeneinheit des Rohstoffs R kostet vier Geldeinheiten. Weitere Kosten entstehen bei der Produktion nicht. Aus Kapazitätsgründen können von Gut G nicht mehr als zwanzig Mengeneinheiten produziert werden.
Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

Lösung:
$G(x) = U(x) - K(x); \;\; x \in [0; 20]$
$U(x) = 10 \cdot x; \;\; x \in [0; 20]$
Kosten $= 4 \cdot r$
Wir müssen die Kosten über die Menge x ausdrücken. Dazu bilden wir die Umkehrfunktion der Produktionsfunktion:
$x = 2r \Rightarrow r = 0{,}5x$
Kosten $K(x) = 4 \cdot r = 4 \cdot 0{,}5x = 2x; \;\; x \in [0; 20]$
Gewinn $G(x) = U(x) - K(x) = 10x - 2x = 8x; \;\; x \in [0; 20]$
d.h. die Gewinnfunktion ist eine steigende Gerade, die ein Maximum am Rand $x = 20$ hat.



Somit beträgt der maximale Gewinn $G(20) = 8 \cdot 20 = 160$ GE.