Wiederholungs-Mathematikklausur vom 2.10.2002

Aufgabe 1

Ein Unternehmen produziert in der ersten Stufe eines zweistufigen Produktionsprozesses aus den Rohstoffen R_1, R_2 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2. In der zweiten Stufe werden aus den Zwischenprodukten die Endprodukte P_1, P_2, P_3 hergestellt. Für die erste Produktionsstufe ergibt sich der Rohstoffverbrauch pro produzierter Mengeneinheit der jeweiligen Zwischenprodukte aus folgender Tabelle (Produktionsmatrix der ersten Stufe):

	Z_1	Z_2
R_1	1 ME	1 ME
R_2	2 ME	1 ME

Für die zweite Produktionsstufe ergibt sich der Verbrauch an Zwischenprodukten pro produzierter Mengeneinheit der jeweiligen Endprodukte wie folgt (Produktionsmatrix der zweiten Stufe):

	P_1	P_2	P_3
Z_1	1 ME	0 ME	2 ME
Z_2	0 ME	1 ME	3 ME

In der kommenden Periode stehen von R_1 500 ME und von R_2 850 ME zur Verfügung. Die beiden Rohstoffvorräte sollen vollständig aufgebraucht werden.

a) Bestimmen Sie die Menge aller ökonomisch sinnvollen Produktionsprogramme für die kommende Periode.

b) Die Unternehmensleitung beabsichtigt, in der kommenden Periode von P_1 290 ME zu produzieren. Wie viele Mengeneinheiten können dann von den Endprodukten P_2 und P_3 hergestellt werden? Und wie viele Mengeneinheiten der Zwischenprodukte müssen dazu in der ersten Stufe produziert werden?

Aufgabe 2

a) Ein Unternehmen fertigt ein Produkt an zwei verschiedenen Produktionsstellen Werk 1 und Werk 2. Die produzierte Menge des Produkts wird in Werk 1 mit x und in Werk 2 mit y bezeichnet. Die Kosten sind gegeben durch:

Werk 1: $K(x) = x^2 - x + 5; \;\; x \in [0; 300]$

Werk 2: $K(y) = \frac{1}{2}y^2 + 4y + 3; \;\; y \in [0; 300]$

Gesucht ist die Kosten-minimale Aufteilung der Produktion auf die Produktionsstellen bei einer Gesamtproduktion von 100 ME.

1. Geben Sie die gemeinsame Kostenfunktion $K(x, y)$ an.
2. Berechnen Sie die gesuchte Mengenkombination.

b) Ein Unternehmen fertigt zwei Produkte P_1 und P_2. Die produzierte und abgesetzte Menge des Produkts P_1 wird mit x bezeichnet und die von P_2 mit y. Der Gewinn ist gegeben durch:

$$G(x,y) = -x^2 + 14x - \tfrac{1}{2}y^2 + 16y + xy - 20;\ \ x, y \in [0; 200]$$

Berechnen Sie die Gewinn-maximale Mengenkombination von P_1 und P_2.

Aufgabe 3

Von den drei Lagern L_1, L_2, L_3 soll Ware zu den vier Verkaufsstellen V_1, V_2, V_3, V_4 transportiert werden. Der Vorrat (in ME) in den Lagern beträgt:

L_1	L_2	L_3
12	4	17

Der Bedarf (in ME) in den Verkaufsstellen beträgt:

V_1	V_2	V_3	V_4
7	6	12	8

Die Transportkosten (in GE) von den Lagern zu den Verkaufsstellen betragen pro ME:

	V_1	V_2	V_3	V_4
L_1	2	5	7	2
L_2	5	3	4	6
L_3	1	2	6	3

Gesucht ist ein kostenminimaler Transportplan.

a) Bestimmen Sie eine Ausgangslösung nach der Vogelschen Approximationsmethode. Und berechnen Sie die Transportkosten Ihrer Lösung.

b) Überprüfen Sie die Ausgangslösung auf Optimalität und Eindeutigkeit.

c) Bestimmen Sie gegebenenfalls eine weitere optimale Lösung.

Aufgabe 4

Frau X. und Herr Y. wollen ein Darlehn zu 6% Zinseszins p.a. aufnehmen, um ein Haus zu kaufen. Das Darlehn möchten sie in zwanzig Jahren abgezahlt haben.

a) Für die Rückzahlung des Darlehns kann das Paar 1 500 Euro am Ende eines jeden Monats aufbringen. Die erste Rückzahlung ist fällig einen Monat nach Darlehnsaufnahme. Wie hoch ist der Darlehnsbetrag?

b) Auf Grund von staatlichen Zuschüssen muss das Paar nur einen Kredit über 180 000 Euro aufnehmen. Wie hoch ist der jeweilige Rückzahlungsbetrag zu Beginn eines Monats, wenn die erste Rückzahlung fällig ist bei Darlehnsaufnahme?

Aufgabe 5

Eine Bank bietet einem Unternehmen zur Finanzierung einer Investition einen Kredit in Höhe von 100 000 GE in zwei Alternativen an.

Alternative 1

- Zins 6,15% p.a.
- jährlich nachschüssige Annuitäten in gleich bleibender Höhe von 20 000 GE

Alternative 2

- Zins 6,15% p.a.
- 1. - 3. Jahr: jährlich nachschüssige Annuitäten in gleich bleibender Höhe von 20 000 GE
- 4. - 8. Jahr: jährlich nachschüssige Annuitäten in gleich bleibender Höhe, so dass die Schuld am Ende des 8. Jahres vollständig getilgt ist

a) Stellen Sie für beide Alternativen den Tilgungsplan (bestehend aus Schuld am Jahresanfang, den jährlichen Zinsen, der jährlichen Tilgung, der Annuität und der Schuld am Jahresende) für das erste und das vierte Jahr auf.

b) Das Unternehmen entscheidet sich für Alternative 1.

Wie viele volle Annuitäten sind zu zahlen? Und wie groß ist die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

c) Das Unternehmen entscheidet sich für Alternative 2. Nach Zahlung der dritten Annuität setzt das Unternehmen die Zahlung für das vierte Jahr aus. Zur Kompensation wird eine Erhöhung der Annuitäten für das fünfte bis achte Jahr vereinbart. Wie hoch sind jetzt die gleich bleibenden Annuitäten der letzten vier Jahre?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Gesamtbedarf $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

$x_1 =$ prod. ME von P_1
$x_2 =$ prod. ME von P_2
$x_3 =$ prod. ME von P_3
Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
$\boxed{1}$	1	1	5	500	
$\boxed{2}$	2	1	7	850	
$\boxed{3}$	1	1	5	500	$\boxed{1}$
$\boxed{4}$	0	-1	-3	-150	$\boxed{2} - 2 \cdot \boxed{1}$

Rekursive Bestimmung der Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$\boxed{4}$ $\quad -x_2 - 3x_3 = -150 \Rightarrow x_2 = 150 - 3x_3$

$\boxed{3}$ $\quad x_1 + x_2 + 5x_3 = 500 \Rightarrow x_1 = 500 - (150 - 3x_3) - 5x_3 = 350 - 2x_3$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 350 - 2x_3 \\ 150 - 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Ökonomisch sinnvolle Lösungen:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & x_1 = 350 - 2x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 175 \\ 2) & x_2 = 150 - 3x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 50 \\ 3) & x_3 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_3 \in [0; 50]$$

Ökonomisch sinnvolle Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 350 - 2x_3 \\ 150 - 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in [0; 50] \right\}$$

b) Berechnung der produzierten Mengeneinheiten der Endprodukte:

$$\left.\begin{array}{rcl} 290 & = & x_1 \\ 290 & = & 350 - 2x_3 \\ x_3 & = & 30 \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 = 150 - 3x_3 = 150 - 3 \cdot 30 = 60$$

Von Endprodukt P_2 können 60 ME und von Endprodukt P_3 können 30 ME hergestellt werden.

Dazu müssen von den Zwischenprodukten folgende ME hergestellt werden:

	$290P_1$	$60P_2$	$30P_3$	$\sum$
Z_1	$1 \cdot 290$	0	$2 \cdot 30$	350
Z_2	0	$1 \cdot 60$	$3 \cdot 30$	150

d.h. es entstehen dabei 350 ME von Z_1 und 150 ME von Z_2

Lösung zu Aufgabe 2:

a) 1. $K(x,y) = x^2 - x + \dfrac{1}{2}y^2 + 4y + 8$

2. $K(x,y) \stackrel{!}{=}$ minimal unter Nebenbedingung $x + y = 100$
$\Rightarrow x = 100 - y$

$$\begin{array}{rrcl} \text{Setze} & f(y) & = & (100-y)^2 - (100-y) + \frac{1}{2}y^2 + 4y + 8 \\ & & = & 10\,000 - 200y + y^2 - 100 + y + \frac{1}{2}y^2 + 4y + 8 \\ & & = & \frac{3}{2}y^2 - 195y + 9\,908 \\ & f'(y) & = & 3y - 195 \\ & f''(y) & = & 3 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:
$0 = 3y - 195 \Rightarrow y = 65$
Hinreichende Bedingung:
$f''(y) = 3 >_{\text{immer}} 0$
d.h. $K(x,y)$ hat in $(35; 65)$ ein globales/absolutes Minimum unter Berücksichtigung der Nebenbedingung
d.h. unter Berücksichtigung der Nebenbedingung sind die Kosten minimal in $x = 35$ ME und $y = 65$ ME

b) $$\begin{aligned} G(x,y) &= -x^2+14x-\tfrac{1}{2}y^2+16y+xy-20 \\ G_x(x,y) &= -2x+14+y \\ G_y(x,y) &= -y+16+x \\ G_{xx}(x,y) &= -2 \\ G_{yy}(x,y) &= -1 \\ G_{xy}(x,y) &= 1 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{ccl} \text{I} & 0 = & -2x+14+y \\ \text{II} & 0 = & -y+16+x \\ \hline \text{I+II} & 0 = & -x+30 \Rightarrow x=30 \\ \text{II} & y = & 16+x = 16+30 = 46 \end{array}$$

d.h. $(30;46)$ ist eine mögliche Extremstelle

Hinreichende Bedingung:

$D(x,y) = (-2)\cdot(-1)-1^2 = 1 >_{\text{immer}} 0$

$G_{xx}(x,y) = -2 <_{\text{immer}} 0$

d.h. $(30;46)$ globales/absolutes Maximum

d.h. die Gewinn-maximalen Mengen betragen $x = 30$ ME und $y = 46$ ME

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Überprüfung der Angebots- und Nachfragemengen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vorratsmenge} = 33 \text{ ME} \\ \text{Bedarfsmenge} = 33 \text{ ME} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{okay}$$

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i	d_i			
L_1	2	5	7	2	12	0	0	0	$\boxed{5}$
L_2	5	3	4	6	4	1	–	–	–
L_3	1	2	6	3	17	1	1	$\boxed{2}$	3
b_j	7	6	12	8	33				
d_j	1	1	$\boxed{2}$	1					
	1	$\boxed{3}$	1	1					
	1	–	1	1					
	–	–	1	1					

TP-Plan:

	V_1	V_2	V_3	V_4	u_i
L_1	2	5	7 $\boxed{4}$	2 $\boxed{8}$	1
L_2	5	3	4 $\boxed{4}$	6	-2
L_3	1 $\boxed{7}$	2 $\boxed{6}$	6 $\boxed{4}$	3	$u_3 = 0$
v_j	1	2	6	1	

insb. betragen die TP-Kosten 103 GE.

b)

Nichtbasisvariable	Opp.kosten
x_{11}	0
x_{12}	2
x_{21}	6
x_{22}	3
x_{24}	7
x_{34}	2

d.h. die Ausgangslösung unter a) ist optimal, jedoch nicht eindeutig.

c) x_{11} kann in die Basis, ohne dass sich die minimalen TP-Kosten von 103 GE verändern.
Elementarer Kreis von x_{11}:

$$\begin{array}{ccccc} + & - & + & - & + \\ x_{11} & x_{13} & x_{33} & x_{31} & x_{11} \end{array}$$

min $\{x_{13}, x_{31}\}$ = min $\{4, 7\} = 4$
d.h. x_{13} verlässt die Basis und $x_{11} = 4$ kommt in die Basis.

$$\text{Setze}\quad \begin{aligned} x_{33} &= 4 + 4 = 8 \\ x_{31} &= 7 - 4 = 3 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgende weitere optimale Lösung:

	V_1	V_2	V_3	V_4
L_1	2 $\boxed{4}$	5	7	2 $\boxed{8}$
L_2	5	3	4 $\boxed{4}$	6
L_3	1 $\boxed{3}$	2 $\boxed{6}$	6 $\boxed{8}$	3

Lösung zu Aufgabe 4:
$p = 6\%$
$n = 20$ Jahre

a) Berechnung der nachschüssigen jährlichen Ersatzrente r_J:
$r_J = 1\,500(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}06) = 18\,495$
Berechnung des Rentenbarwerts:
$R_0 = 18\,495 \cdot \frac{1{,}06^{20}-1}{0{,}06} \cdot \frac{1}{1{,}06^{20}} = 212\,136{,}19$
d.h. das Paar kann einen Kredit über 212 136,19 Euro aufnehmen.

b) Berechnung der nachschüssigen jährlichen Ersatzrente r_J:

$$\begin{aligned} 180\,000 &= r_J \cdot \frac{1{,}06^{20}-1}{0{,}06} \cdot \frac{1}{1{,}06^{20}} \\ 180\,000 &= r_J \cdot 11{,}4699 \\ 15\,693{,}22 &= r_J \end{aligned}$$

Berechnung der vorschüssigen monatlichen Rente r_M:
$r_J = r_M\,(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}06) = r_M \cdot 12{,}39 \Rightarrow r_M = 1\,266{,}60$
d.h. der monatliche vorschüssige Rückzahlungsbetrag beträgt 1 266,60 Euro.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) Alternative 1

Jahr	Schuld zu Beginn d.J.	Zinsen am Ende d.J.	Tilgung am Ende d.J.	Annuität am Ende d.J.	Schuld am Ende d.J.
1	100 000	6 150	13 850	20 000	86 150
4	55 842,30	3 434,30	16 565,70	20 000	39 276,60

Alternative 2

$A = 55\,842{,}30 \cdot 1{,}0615^5 \cdot \dfrac{0{,}0615}{1{,}0615^5 - 1} = 13\,310{,}90$

Jahr	Schuld zu Beginn d.J.	Zinsen am Ende d.J.	Tilgung am Ende d.J.	Annuität am Ende d.J.	Schuld am Ende d.J.
1	100 000	6 150	13 850	20 000	86 150
4	55 842,30	3 434,30	9 876,60	13 310,90	45 965,70

b) $a_n = \dfrac{100\,000}{20\,000} = 5$

$n = -\dfrac{\ln[1 - 5 \cdot 0{,}0615]}{\ln 1{,}0615} = 6{,}1566$

d.h. es sind sechs volle Annuitäten zu zahlen.

$K_6 = 100\,000 \cdot 1{,}0615^6 - 20\,000 \cdot \dfrac{1{,}0615^6 - 1}{0{,}0615} = 3\,026{,}17$

$3\,026{,}17 \cdot 1{,}0615 = 3\,212{,}28$

d.h. die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität beträgt 3 212,28 GE.

c) Restschuld am Ende des vierten Jahres:

$K_4 = 55\,842{,}29 \cdot 1{,}0615 = 59\,276{,}59$

Berechnung der Höhe der restlichen vier Annuitäten A:

$A = 59\,276{,}60 \cdot 1{,}0615^4 \cdot \dfrac{0{,}0615}{1{,}0615^4 - 1} = 17\,165{,}52$

d.h. die Annuität beträgt 17 165,52 GE.