# Statistik-Klausur vom 14. Juli 2004

*Bearbeitungszeit: 90 Minuten*

**Aufgabe 1**
Beschreiben Sie die Grundzüge der Methode, mit der das Statistische Bundesamt in Wiesbaden die Inflationsrate berechnet, von der die privaten Haushalte in Deutschland betroffen sind. (Hinweis: Von Ihnen wird eine verbale Darstellung in vollständigen Sätzen erwartet; eine Auflistung von Schlagwörtern genügt nicht.)

**Aufgabe 2**
Einem Markenartikler liegen folgende Beobachtungen über Verkaufspreis und Absatzmengen seines wichtigsten Produkts in fünf Verkaufsperioden vor:

| Preis (in Euro je Stück) | Absatzmenge (in 1 000 Stück) | |
|---|---|---|
| 50 | 500 | |
| 80 | 360 | |
| 70 | 440 | |
| 60 | 420 | |
| 90 | 380 | |
| | | |

a) In der nächsten Verkaufsperiode ist ein Verkaufspreis von 85 € je Stück geplant. Mit welcher Absatzmenge ist zu rechnen?

b) In der übernächsten Verkaufsperiode sollen 300 000 Stück des fraglichen Produkts verkauft worden. Wie hoch ist dann der Preis pro Stück anzusetzen?

c) Für wie zuverlässig halten Sie Ihre Berechnungen unter a) und b)?

**Aufgabe 3**

Auftragseingang (=Werte ohne Mehrwertsteuer) im Baugewerbe
in der BRD im Januar und September 2003
(Index: Jahr 2000=100)

| Zeitraum | Empirische Werte | Saisonbereinigte Werte |
|---|---|---|
| Januar 2003 | 56,8 | 81,9 |
| September 2003 | 91,2 | 79,0 |

Quelle: Empirische Werte: MB der BuBa, März 2004, S. 62*, Tab. IX.3
Saisonbereinigte Werte: Saisonbereinigte Wirtschaftszahlen, BuBa, April 2004, S. 52

a) Worauf ist der leichte Rückgang der saisonbereinigten Werte von Januar bis September 2003 zurückzuführen? Begründen Sie bitte Ihre Antwort.

b) Worauf ist der starke Anstieg der empirischen Werte von Januar bis September 2003 zurückzuführen? Begründen Sie bitte Ihre Antwort.

**Aufgabe 4**

Ein Unternehmen produziert und vertreibt ein Gut. Auf Grund der technischen Gegebenheiten können die Produktionsstücke zwei verschiedene Arten von Fehlern aufweisen. Die beiden Fehlerarten werden im Folgenden mit Fehler A und Fehler B bezeichnet.

Bei der Qualitätskontrolle stellt sich heraus, dass

1. bei 5% aller überprüften Produktionsstücke Fehler A beobachtet wird;

2. bei 2% aller überprüften Produktionsstücke beide Fehler beobachtet werden (also sowohl Fehler A als auch Fehler B);

3. bei 4% der überprüften Produktionsstücke, bei denen Fehler A nicht beobachtet wird, Fehler B beobachtet wird.

a) Formulieren Sie für die genannten Ereignisse in geeigneter Weise die Wahrscheinlichkeiten.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem zufällig ausgewählten Produktionsstück, bei dem Fehler A auftritt, Fehler B beobachtet wird.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem zufällig ausgewählten Produktionsstück Fehler B nicht auftritt?

d) Ist das Auftreten der beiden Fehler A und B (stochastisch) unabhängig voneinander? Begründen Sie bitte Ihre Antwort.

**Aufgabe 5**

Einem Unternehmen stehen für eine Investitionsentscheidung zwei Alternativen A und B zur Auswahl. Die Zufallsvariable $X$ sei der Gewinn (gemessen in GE) der Anlagealternative A für das Kalenderjahr 2005, die Zufallsvariable $Y$ sei der Gewinn (gemessen in GE) der Anlagealternative B ebenfalls für das Kalenderjahr 2005.

Die Unternehmensleitung hat folgende Gewinnerwartungen für 2005:

| Höhe des Gewinns ($G$) (in GE) | Alternative A $P(X = G)$ | Alternative B $P(Y = G)$ |
|---|---|---|
| $-10\,000$ | 0,10 | 0,12 |
| $-\ \ 5\,000$ | 0,20 | 0,15 |
| 0 | 0,20 | 0,28 |
| $+\ \ 5\,000$ | 0,30 | 0,25 |
| $+10\,000$ | 0,20 | 0,20 |

In der Geschäftsleitung des Unternehmens gibt es vier verschiedene Meinungen dazu, welches Entscheidungskriterium man zu Grunde legen soll bei der Wahl zwischen A und B.

Welche der beiden Anlagealternativen A und B wird gewählt, wenn als Entscheidungskriterium herangezogen wird:

a) die Höhe der Gewinnerwartung in 2005?

b) die Minimierung der Streuung des Gewinns in 2005?

c) die Maximierung der Wahrscheinlichkeit, in 2005 einen positiven Gewinn ($G > 0$) zu erzielen?

d) die Minimierung der Wahrscheinlichkeit, in 2005 eine Verlust ($G < 0$) zu erleiden?

**Aufgabe 6**
Angenommen, Sie seien Manager bzw. Managerin bei T-Mobile und interessieren sich für die monatlichen Telekommunikationsausgaben (Telefon; SMS; Internet) von Studentinnen und Studenten in Deutschland.
Dazu lassen Sie eine Zufallsstichprobe von 500 Studierenden befragen.
In dieser Stichprobe beliefen sich die monatlichen Telekommunikationsausgaben auf durchschnittlich 65 € bei einer Streuung von 25 € (gemessen durch die Standardabweichung).
Innerhalb welchen Bereichs vermuten Sie mit einer Sicherheit (Wahrscheinlichkeit) von annähernd 99% die durchschnittlichen monatlichen Ausgaben für Telekommunikation aller Studierenden in Deutschland?
(Hinweis: Zu einer vollständigen Lösung gehört in jedem Fall eine verbale Interpretation der Rechenergebnisse; d.h. ein vollständiger Antwortsatz mit Subjekt, Prädikat und Objekt.)

*Lösung zu Aufgabe 1:*
Das Statistische Bundesamt in Wiesbaden berechnet mit dem Laspeyres-Preisindex die Inflationsrate der privaten Lebenshaltung (Verbraucherpreisindex). Der Laspeyres-Preisindex lässt sich berechnen aus den Ausgabenanteilen im Basisjahr und den Preisverhältnissen (Preismessziffern) von Berichtsjahr zu Basisjahr. Vorteil des Laspeyres-Preisindex gegenüber dem Paasche-Preisindex ist es, dass die Mengen nicht jedes Jahr neu, sondern nur jeweils im Basisjahr erfasst werden müssen.
Der verwendete Warenkorb besteht aus etwa 800 Waren und Dienstleistungen. Das gegenwärtige Basisjahr ist das Jahr 2000. Alle fünf Jahre wird der Preisindex auf ein neues Basisjahr umgestellt und der Warenkorb neu zusammengestellt. Die erhobenen Preise sind Durchschnittspreise aus der gesamten BRD. Die erhobenen Mengen werden der Einkommens- und Verbrauchsstichprobe bzw. aus den laufenden Wirtschaftsrechnungen entnommen.

*Lösung zu Aufgabe 2:*
$X$ = Preis (in € pro Stück)
$Y$ = abgesetzte Menge (in 1 000 Stück)

a)

| Nr. | $x_i$ | $y_i$ | $x_i \cdot y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 50 | 500 | 25 000 | 2 500 | 250 000 |
| 2 | 80 | 360 | 28 800 | 6 400 | 129 600 |
| 3 | 70 | 440 | 30 800 | 4 900 | 193 600 |
| 4 | 60 | 420 | 25 200 | 3 600 | 176 400 |
| 5 | 90 | 380 | 34 200 | 8 100 | 144 400 |
| $\sum$ | 350 | 2 100 | 144 000 | 25 500 | 894 000 |

Regressionsgerade $f(x) = a_1 + b_1 \cdot x$
Gesucht $f(85) = ?$
$b_1 = \dfrac{5 \cdot 144\,000 - 350 \cdot 2\,100}{5 \cdot 25\,500 - 350^2} = \dfrac{-15\,000}{5\,000} = -3$
$a_1 = \dfrac{2\,100 - (-3) \cdot 350}{5} = 630$
$f(85) = 630 - 3 \cdot 85 = 375$
d.h. gemäß der Methode der kleinsten Quadrate ist mit einer Absatzmenge von 375 000 Stück zu rechnen.

b) Regressionsgerade $g(y) = a_2 + b_2 \cdot y$
Gesucht $g(300) = ?$
$b_2 = \dfrac{-15\,000}{5 \cdot 894\,000 - 2\,100^2} = \dfrac{-15\,000}{60\,000} = -0{,}25$
$a_2 = \dfrac{350 - (-0{,}25) \cdot 2\,100}{5} = 175$
$g(300) = 175 - 0{,}25 \cdot 300 = 100$
d.h. gemäß der Methode der kleinsten Quadrate ist der Verkaufspreis pro Stück mit 100 € anzusetzen.

c) Bestimmtheitsmaß $B = b_1 \cdot b_2 = (-3) \cdot (-0{,}25) = 0{,}75$
d.h. 75% der Streuung des Absatzes wird erklärt durch die Streuung der Regressionsgeraden.
Korrelationskoeffizient $r_{xy} = -\sqrt{B} = -\sqrt{0{,}75} = -0{,}8660$
d.h. es liegt starker negativer linearer Zusammenhang vor; je höher die Preise, desto niedriger der Absatz.
Auf die Berechnung unter a) und b) ist Verlass.

*Lösung zu Aufgabe 3:*

a) Ohne Saison-Einflüsse ist die Auftragslage im Baugewerbe rückläufig; d.h. die konjunkturelle Lage im Baugewerbe verschlechtert sich.
Aus dem Modell $y_t = g_t + s_t + u_t$ folgt $y_t - s_t = g_t + u_t$
wobei $g_t$ die so genannte glatte Komponente (Trend + Konjunktur) ist.

b) Im Winter ruht das Baugewerbe. Anschließend gibt es Wetter-bedingt wieder mehr Aufträge.

*Lösung zu Aufgabe 4:*

a) $A$= zufällig ausgewähltes Produktionsstück weist Fehler A auf
$B$= zufällig ausgewähltes Produktionsstück weist Fehler B auf
$0{,}05 = P(A)$
$0{,}02 = P(A \cap B)$
$0{,}04 = P(B \mid \overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A} \cap B) = 0{,}04 \cdot 0{,}95 = 0{,}038$
Jetzt können wir die Arbeitstabelle aufstellen:

| | $A$ | $\overline{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0,02 | 0,038 | 0,058 |
| $\overline{B}$ | 0,03 | 0,912 | 0,942 |
| | 0,05 | 0,95 | 1 |

b) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}02}{0{,}05} = 0{,}4$
d.h. die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 0,4.

c) $P(\overline{B}) = 0{,}942$
d.h. die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 0,942.

d) $P(A) \cdot P(B) = 0{,}05 \cdot 0{,}058 = 0{,}0029 \neq 0{,}02 = P(A \cap B)$
d.h. die Ereignisse $A, B$ sind stochastisch abhängig.

*Lösung zu Aufgabe 5:*
$X$ = Gewinn (in GE) der Anlagemöglichkeit A
$Y$ = Gewinn (in GE) der Anlagemöglichkeit B

a) $E[X] = -10\,000 \cdot 0{,}1 - 5\,000 \cdot 0{,}2 + 0 + 5\,000 \cdot 0{,}3 + 10\,000 \cdot 0{,}2 = 1\,500$
$E[Y] = -10\,000 \cdot 0{,}12 - 5\,000 \cdot 0{,}15 + 0 + 5\,000 \cdot 0{,}25 + 10\,000 \cdot 0{,}2 = 1\,300$
d.h. gemessen am Erwartungswert fällt die Entscheidung für eine Anlage in Möglichkeit A.

b) Die Streuung einer Zufallsvariable lässt sich messen durch die Standardabweichung oder durch die Varianz.

$$\begin{aligned} V[X] &= (-10\,000 - 1\,500)^2 \cdot 0{,}1 + (-5\,000 - 1\,500)^2 \cdot 0{,}2 \\ &\quad +(0 - 1\,500)^2 \cdot 0{,}2 + (5\,000 - 1\,500)^2 \cdot 0{,}3 \\ &\quad +(10\,000 - 1\,500)^2 \cdot 0{,}2 \\ &= 40\,250\,000 \\ V[Y] &= (-10\,000 - 1\,300)^2 \cdot 0{,}12 + (-5\,000 - 1\,300)^2 \cdot 0{,}15 \\ &\quad +(0 - 1\,300)^2 \cdot 0{,}28 + (5\,000 - 1\,300)^2 \cdot 0{,}25 \\ &\quad +(10\,000 - 1\,300)^2 \cdot 0{,}2 \\ &= 40\,310\,000 \end{aligned}$$

d.h. gemessen an der Varianz fällt die Entscheidung für Alternative A.

c) $P(X > 0) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$
$P(Y > 0) = 0{,}25 + 0{,}20 = 0{,}45$
d.h. gemessen an der Maximierung der Wahrscheinlichkeit für einen positiven Gewinn fällt die Entscheidung für Anlagemöglichkeit A.

d) $P(X < 0) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$
$P(Y < 0) = 0{,}12 + 0{,}15 = 0{,}27$
d.h. gemessen an der Minimierung der Wahrscheinlichkeit für einen Verlust fällt die Entscheidung für Anlagemöglichkeit B.

*Lösung zu Aufgabe 6:*

$\mu =$ im Mittel aufgebrachte Ausgaben (in €) eines Studierenden pro Monat für Telekommunikation

Stichprobe vom Umfang $n = 500$ mit $\overline{x} = 65$ und $s = 25$
Faustregel $n \geq 30$ erfüllt
0,99-KI für $\mu = [65 \pm 2{,}5758 \cdot \dfrac{25}{\sqrt{500}}] = [65 \pm 2{,}8798] = [62{,}1202\ ;\ \ 67{,}8798]$

d.h. [62 ; 68] ist ein geschätzter Bereich für das Intervall, in dem die mittleren monatlichen Ausgaben für Telekommunikation eines Studierenden mit der Wahrscheinlichkeit 0,99 liegen.