Wirtschaftsmathematik-Klausur vom 01.07.2015 und Finanzmathematik-Klausur vom 07.07.2015

Bearbeitungszeit: jeweils 45 Minuten

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{x^2+3x-10}.$$

b) Gegeben sind die Preis-Absatz Funktion $x(p)$ und die Kostenfunktion $K(x)$ eines Unternehmens durch

$$x(p) = 15 - 0{,}2p \text{ mit } p \in [0; 75]$$
$$K(x) = 4x^2 - 6x + 126 \text{ mit } x \geq 0$$

1. Berechnen Sie die Gewinnfunktion und bestimmen Sie ihren ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich.
2. Ermitten Sie den Gewinn-maximalen Preis und die Gewinn-maximale Menge.
3. Nehmen Sie an, die Grafen der Grenzkosten- und der Grenzerlösfunktion für ein Unternehmen liegen Ihnen vor und diese schneiden sich in einem Punkt x_0. Welche Aussage können Sie dann über diesen Schnittstelle x_0 bzw. über die Gewinnfunktion treffen?

Aufgabe 2

a) Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcr} \text{I} & x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 35 \\ \text{II} & 2x_1 + x_2 + 13x_3 & = & 65 \\ \text{III} & 2x_1 - 4x_2 + 28x_3 & = & 60 \\ \text{IV} & 3x_1 + 4x_2 + 12x_3 & = & 100 \end{array}$$

1. Bestimmen Sie alle nichtnegativen Lösungen.
2. Bestimmen Sie eine beliebige ganzzahlige nichtnegative Lösung.

b) In einem Produktionsprozess werden aus drei Rohmaterialien R_1, R_2, R_3 die Endprodukte E_1, E_2, E_3 hergestellt. Der Gesamtbedarf an Rohmaterial für jeweils eine ME der Endprodukte ist wie folgt gegeben:

	E_1	E_2	E_3
R_1	2	6	3
R_2	3	3	4
R_3	4	4	5

An Vorrat stehen im Lager folgende Mengen zur Verfügung: 230 ME von R_1, 210 ME von R_2 und 270 ME von R_3.

Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit dem das Produktionsprogramm berechnet werden könnte. (Keine Berechnung des Gleichungssystems!)

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die Funktion
$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}y^2 - 4y + 10 \;\; ; (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
einen streng relativen (lokalen) Extremwert besitzt. Geben Sie jeweils an, ob es sich dabei um ein Maximum oder Minium handelt.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion
$$f(x,y) = y \cdot e^x + 4x + 4y + 8 \;\; ; (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
keine streng relativen (lokalen) Extremstellen besitzt.

Aufgabe 4

Ein Kapital von 50 000 € wird zu einem nominellen Jahreszins von 1,9% angelegt.

a) Berechnen Sie das Endkapital nach fünf Jahren bei

1. linearer Verzinsung.
2. nachschüssiger Verzinsung.
3. quartalsweiser Verzinsung zum relativen Zins.
4. stetiger Verzinsung.

b) Am Ende eines welchen Jahres übersteigt das Kapital erstmalig den Wert 52 920 €? Beantworten Sie diese Frage für die vier Zinsmodelle aus a).

Aufgabe 5

Zu einem Jahreszins von 1,2 % werden in den Jahren 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020 jeweils am Ende des Jahres 5 000 € eingezahlt.

a) Wie hoch ist der Rentenendwert der Einzahlungen?

b) Ab Beginn des Jahres 2022 wird anschließend jeweils zu Beginn eines Jahres der volle Betrag von 4 000 € abgehoben, der Jahreszins beträgt weiterhin 1,2 %.

1. Wie viele Jahre lang kann der volle Betrag von 4 000 € abgehoben werden?
2. Wie hoch ist der Kontostand ein Jahr nach der letzten vollen Abhebung?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) *1. Lösungsweg:* (Regel von de l'Hôpital)
Durch Einsetzten von $x = 2$ ergibt sich: Nenner=0=Zähler
$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{x^2+3x-10} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{2x+3} = \frac{2}{7}$$
2. Lösungsweg: (Faktorisieren und Kürzen)
$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{x^2+3x-10} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{x+5} = \frac{2}{7}$$

b) 1. $x = 15 - 0{,}2p \Leftrightarrow p = 75 - 5x$

p	x
0	15
75	0

d.h. $p(x) = 75 - 5x \;\; ; x \in [0; 15]$
$G(x) = p(x) \cdot x - K(x) = 75x - 5x^2 - 4x^2 + 6x - 126 = -9x^2 + 81x - 126 \;\; ; x \in [0; 15]$

2. $0 = G'(x) = -18x + 81 \Leftrightarrow x = 4{,}5$
$G''(x) = -18 <_{\text{immer}} 0$; d.h. $x = 4{,}5$ globale Maximalstelle; d.h. die Gewinn-maximale Menge beträgt 4,5 ME und der Gewinn-maximale Preis beträgt $p(4{,}5) = 75 - 5 \cdot 4{,}5 = 52{,}5$ GE.

3. In den Schnittstellen von Grenzkosten und Grenzerlös liegen die möglichen Extremstellen der Gewinnfunktion.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	$\boxed{1}$	3	-1	35	
2	2	1	13	65	
3	2	-4	28	60	
4	3	4	12	100	
5	1	3	-1	35	1
6	0	$\boxed{-5}$	15	-5	2 $-2 \cdot$ 1
7	0	-10	30	-10	3 $-2 \cdot$ 1
8	0	-5	15	-5	4 $-3 \cdot$ 1
9	1	3	-1	35	5
10	0	-5	15	-5	6
11	0	0	0	0	7 $-2 \cdot$ 6
12	0	0	0	0	8 $-$ 6

Zeile 10: $-5x_2 + 15x_3 = -5 \iff x_2 = 1 + 3x_3$.

Einsetzen in Zeile 9 ergibt: $x_1 + 3 \cdot (1 + 3x_3) - x_3 = 35 \iff x_1 = 32 - 8x_3$.

1. nichtnegative $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 32 - 8x_3 \\ 1 + 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in [0; 4] \}$

2. Für z.B. $x_3 = 0$ gilt: $x_1 = 32$ und $x_2 = 1$.

b) e_1=ME von E_1, e_2=ME von E_2, e_3=ME von E_3

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2e_1 + 6e_2 + 3e_3 = 230 \\ \text{II} & 3e_1 + 3e_2 + 4e_3 = 210 \\ \text{III} & 4e_1 + 4e_2 + 5e_3 = 270 \end{array}$$

Lösung zu Aufgabe 3:

a) $f_x(x, y) = x^2 - 3x + 2 \quad f_{xx}(x, y) = 2x - 3$
$f_y(x, y) = y - 4 \quad f_{yy}(x, y) = 1$
$f_{xy}(x, y) = 0$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llll} \text{I} & 0 & = & x^2 - 3x + 2 \quad \Leftrightarrow x = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 2} = 1{,}5 \pm 0{,}5 \Leftrightarrow x = 2 \text{ oder } x = 1 \\ \text{II} & 0 & = & y - 4 \qquad\qquad \Leftrightarrow y = 4 \end{array}$$

d.h. (1;4) und $(2; 4)$ sind stationäre Punkte.

Hinreichende Bedingung:

$D(x; y) = (2x - 3) \cdot 1 - 0^2 = 2x - 3$

$D(1; 4) = -1 < 0$ d.h. (1;04) ist eine Sattelstelle

$D(2; 4) = 1 > 0$ und $f_{xx}(2; 4) = 1 > 0$

d.h. $(2; 4)$ ist eine lokale Minimalstelle.

b) $f_x(x, y) = y \cdot e^x + 4 \quad f_{xx}(x, y) = y \cdot e^x$

$f_y(x, y) = e^x + 4 \quad f_{yy}(x, y) = 0$

$f_{xy}(x, y) = e^x$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llll} \text{I} & 0 & = & y \cdot e^x + 4 \\ \text{II} & 0 & = & e^x + 4 \quad \Leftrightarrow e^x = -4 \text{ ↯}, \text{ da } e^x \geq_{\text{immer}} 0 \end{array}$$

d.h. es gibt keine stationären Punkte; d.h. es gibt keine lokalen Extremstellen.

Lösung zu Aufgabe 4:

a)
1. $K_5 = 50\,000 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}019) = 54\,750{,}00$
2. $K_5 = 50\,000 \cdot 1{,}019^5 = 54\,933{,}96$
3. $K_5 = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}019}{4}\right)^{20} = 54\,970{,}58$
4. $K_5 = 50\,000 \cdot e^{5 \cdot 0{,}019} = 54\,982{,}94$

b)
1. $52\,920 = 50\,000(1 + n \cdot 0{,}019) \Leftrightarrow n = \frac{\frac{52\,920}{50\,000} - 1}{0{,}019} = 3{,}073684$

   d.h. nach drei Jahren und 27 Tagen; d.h. am Ende des vierten Jahres wird erstmals der Betrag von 52 920 € überschritten.
2. $n = \frac{\ln \frac{52\,920}{50\,000}}{\ln 1{,}019} = 3{,}015571$

   d.h. am Ende des vierten Jahres wird erstmals der Betrag von 52 920 € überschritten.
3. $j = \left(1 + \frac{0{,}019}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}019136$

   $n = \frac{\ln \frac{52\,920}{50\,000}}{\ln 1{,}019136} = 2{,}99434$ Jahre

   d.h. am Ende des dritten Jahres wird erstmals der Betrag von 52 920 € überschritten.
4. $52\,920 = 50\,000 \cdot e^{n \cdot 0{,}019} \Leftrightarrow n = \frac{\ln \frac{52\,920}{50\,000}}{0{,}019} = 2{,}987281$ Jahre

   d.h. am Ende des dritten Jahres wird erstmals der Betrag von 52 920 € überschritten.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $K_6 = 5\,000 \cdot \dfrac{1{,}012^6 - 1}{0{,}012} = 30\,914{,}53$

d.h. das Endguthaben beträgt 30 914,53 €.

b) 1. $R_0 = 30\,914{,}53 \cdot 1{,}012 = 31\,285{,}5$

$n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{31\,285{,}5}{4\,000 \cdot 1{,}012} \cdot 0{,}012]}{\ln 1{,}012} = 8{,}159414$

d.h. es können acht volle Beträge in Höhe von 4 000 € abgehoben werden.

2. $K_8 = 31\,285{,}5 \cdot 1{,}012^8 - 4\,000 \cdot 1{,}012 \cdot \dfrac{1{,}012^8 - 1}{0{,}012} = 640{,}859$

d.h. das Restguthaben beträgt 640,86 €.