W-Mathe Aufgaben vom 03.02.2016
F-Mathe Aufgaben vom 02.02.2016

Aufgabe 1

a) Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = \frac{2x+5}{x^3} \quad ; x > 0$$

Welche der drei nachfolgenden Funktionen ist die Ableitung von $f(x)$? (Begründung!)

1. $f'(x) = \dfrac{-4x-15}{x^4}$
2. $f'(x) = \dfrac{4x+15}{x^4}$
3. $f'(x) = \dfrac{-4x-15}{x^6}$

b) A, B, C seien $(3,3)$-Matrizen und E sei die Einheitsmatrix vom Typ (3,3). Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie, soweit es geht, zusammen:

1. $(2A - B)C + CB$
2. $(2A - B)E + B$
3. $(2A - B)B - 2AB$

c) Gegeben ist die folgende Preis-Absatz Funktion:

$$x(p) = \frac{100}{5+p} \quad ; p \geq 0.$$

Berechnen und interpretieren Sie die Elastizität an der Stelle $p = 5$.

Aufgabe 2

a) Aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 werden die drei Endprodukte E_1, E_2, E_3 hergestellt.

Der Rohstoffgesamtbedarf (in Mengeneinheiten (ME)) ist wie folgt:

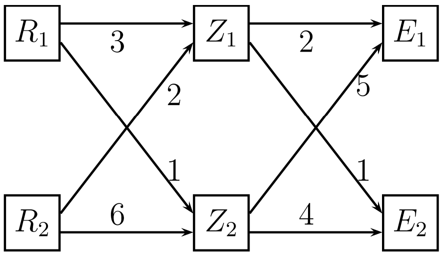
- Für die Erzeugung einer Mengeneinheit des Endproduktes E_1 werden 2 ME von R_1, 4 ME von R_2 und 9 ME von R_3 benötigt.
- Für die Erzeugung einer Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 1 ME von R_1, 2 ME von R_2 und 3 ME von R_3 benötigt.
- Für die Erzeugung einer Mengeneinheit des Endproduktes E_3 werden 1 ME von R_1, 1 ME von R_2 und 1 ME von R_3 benötigt.

Es stehen insgesamt 12 ME von R_1, 23 ME von R_2 und 40 ME von R_3 für die Produktion zur Verfügung. Berechnen Sie für diesen Vorrat an Rohmaterial das Produktionsprogramm und gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Stellen Sie das Gleichungssystem auf.

2. Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems mit dem Gaußalgorithmus.

b) Gegeben ist für einen zweistufigen Produktionsprozess die Materialflussgrafik:



Geben Sie die Gesamtbedarfsmatrix an.

Aufgabe 3

Der Unternehmer Luigi Lagrange lässt in seiner Fabrik eine Maschine in den beiden Modellen „Standard“ und „Premium“ anfertigen. Insgesamt sollen seine Mitarbeiter pro Monat genau 1.000 Maschinen montieren. Für x Standardmodelle und y Premiummodelle benötigen Luigis Mitarbeiter die folgenden Arbeitsstunden:

$$A(x, y) = 3x^2 + y^2 - 2xy - 100y + 233.750 \ .$$

Luigi Lagrange fragt sich, wie er die Stückzahlen x und y wählen soll, so dass seine Mitarbeiter möglichst wenige Arbeitsstunden für die 1.000 zu montierenden Maschinen erbringen müssen.
Bearbeiten Sie die Aufgabe nach dem folgenden Schema:

a) Stellen Sie die Nebenbedingung auf.

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

c) Berechnen Sie die erforderlichen partiellen Ableitungen für das Lagrangeverfahren.

d) Ermitteln Sie die optimale Modellkombination mit dem Lagrangeverfahren.

e) Geben Sie die Zahl der Arbeitsstunden A an, die Luigi bei der optimalen Modellkombination vergüten muss.

Aufgabe 4

Ein Kapital von 100 000 GE wird am 17. Januar 2016 zu einem Jahreszins von 3,6% angelegt. Auf welchen Betrag wächst das Kapital bis zum 11. Mai 2018 bei

a) relativ gemischter Verzinsung an?

b) bankmäßig gemischter Verzinsung an?

c) täglicher Verzinsung zum relativen Zins an?

d) konformer Verzinsung an?

Aufgabe 5
Auf einem Konto werden zu 0,8% Jahreszins folgende Kontobewegungen verbucht:

- Einzahlung von 10 000 GE am 01.01.2017
- Auszahlungen von 100 GE monatlich vorschüssig in den Jahren 2019, 2020, 2021
- Einzahlungen von 500 GE vierteljährlich nachschüssig in den Jahren 2024 und 2025

a) Wie hoch ist der Kontostand am

1. 31.12.2021?
2. 31.12.2025?

b) Wie viele volle Jahre lang können anschließend ab dem 01.01.2028 jährlich vorschüssig 900 GE entnommen werden?

Aufgabe 6
Ein Unternehmen möchte eine Investition tätigen. Dafür stehen dem Unternehmen verschiedene Alternativen zur Verfügung. Bei allen Alternativen muss am 1. Januar 2016 ein Betrag von 100 000 GE als Investitionssumme gezahlt werden. Verwenden Sie bei den folgenden Fragestellungen einen jährlichen Rechnungszins von 3,8%.

a) Bei Investitionsalternative 1 erhält das Unternehmen als Rückfluss eine jährlich nachschüssige Rente in Höhe von 20 000 GE. Erstmalig geht dieser Betrag am 31. Dezember 2016 bei dem Unternehmen ein.

1. Wie hoch ist der Barwert dieser Rente, wenn sie sieben Jahre lang gezahlt wird? Lohnt sich bei einem Zahlungszeitraum von sieben Jahren diese Investition?
2. Wie hoch muss die Rentenlaufzeit mindestens sein, damit der Barwert der Rente größer ist als die Investitionssumme von 100 000 GE?

b) Bei Investitionsalternative 2 erhält das Unternehmen als Rückfluss eine quartalsweise nachschüssige Rente in Höhe von 4 950 GE. Erstmalig geht dieser Betrag am 31. März 2016 bei dem Unternehmen ein. Wie hoch ist der Barwert dieser Rente, wenn sie sieben Jahre lang gezahlt wird? Lohnt sich bei einem Zahlungszeitraum von sieben Jahren diese Investition?

c) Bei Investitionsalternative 3 erhält das Unternehmen als Rückfluss am 1. März 2017 einen Betrag von 30 000 GE, am 1. November 2019 einen Betrag von 40 000 GE, am 1. Mai 2021 einen Betrag von 45 000 GE und am 1. Juni 2022 einen Betrag von 25 000 GE ausgezahlt. Berechnen Sie den Barwert dieser Zahlungen zum Bewertungsstichtag 1. Januar 2016. Verwenden Sie (als Zinsmodell) die relativ gemischte Verzinsung. Lohnt sich diese Investition?

d) Das Unternehmen möchte Investitionsalternative 3 aus Teilaufgabe c) wie folgt verändern:

- Die Zahlungen am 1. März 2017 und am 1. Juni 2022 sollen so verändert werden, dass sich der Barwert aller Zahlungen zum Bewertungsstichtag 1. Januar 2016 auf 120 000 GE beläuft.
- Die Zahlung am 1. März 2017 soll 0,1% des Quadrats der veränderten Zahlung am 1. Juni 2022 betragen.

Wie hoch ist die Zahlung am 1. Juni 2022, wenn diese positiv sein soll? Verwenden Sie (als Zinsmodell) wie in Teilaufgabe c) die relativ gemischte Verzinsung.

Lösung zu Aufgabe 1

a) $f'(x) = \dfrac{2x^3 - (2x+5)\cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{x^2(2x-6x-15)}{x^6} = \dfrac{-4x-15}{x^4}$

b)
1. $(2A-B)C + CB = 2AC - BC + CB$
2. $(2A-B)E + B = 2A - B + B = 2A$
3. $(2A-B)B - 2AB = 2AB - B^2 - 2AB = -B^2$

c) $x(5) = \dfrac{100}{5+5} = 10$

$x'(p) = \left(100\cdot(5+p)^{-1}\right)' = 100\cdot(-1)\cdot(5+p)^{-2} = -\dfrac{100}{(5+p)^2}$

$x'(5) = -\dfrac{100}{10^2} = -1$

$\varepsilon_x(5) = (-1)\cdot\frac{5}{10} = -0{,}5$; d.h. steigt der Preis von 5 GE um ein Prozent, so sinkt der Absatz um etwa 0,5%.

Lösung Aufgabe 2 (33 Punkte)

a) Rohstoffbedarf:

	E_1	E_2	E_3
R_1	2	1	1
R_2	4	2	1
R_3	9	3	1

1. Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} I & 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 12 \\ II & 4x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 23 \\ III & 9x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 40 \end{array}$$

2. Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	$\boxed{2}$	1	1	12	
2	4	2	1	23	
3	9	3	1	40	
4	2	1	1	12	1
5	0	0	-1	-1	2 $-2\cdot$ 1
6	0	$\boxed{-3}$	-7	-28	$2\cdot$ 3 $-9\cdot$ 1
7	2	1	1	12	4
8	0	-3	-7	-28	6
9	0	0	-1	-1	5

Zeile 9: $-x_3 = -1 \iff x_3 = 1$.

Einsetzen in Zeile 8 ergibt: $-3x_2 - 7 \cdot 1 = -28 \iff -3x_2 = -21 \iff x_2 = 7$.

Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $2x_1 + 7 + 1 = 12 \iff 2x_1 = 4 \iff x_1 = 2$.

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich somit wie folgt:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

b) Gesamtbedarfsmatrix:

$$\begin{aligned} R_1 \to E_1: &\ 3\cdot 2 + 1 \cdot 5 &= 11 \\ R_1 \to E_2: &\ 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 &= 7 \\ R_2 \to E_1: &\ 2 \cdot 2 + 6 \cdot 5 &= 34 \\ R_2 \to E_2: &\ 6 \cdot 4 + 2 \cdot 1 &= 26 \end{aligned}$$

Somit ist $M = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 34 & 26 \end{pmatrix}$ die Gesamtbedarfsmatrix.

Lösung Aufgabe 3

a) $x + y = 1.000$

b) $L(x, y, \lambda) = 3x^2 + y^2 - 2xy - 100y + 233.750 + \lambda(x + y - 1.000)$

c) partielle Ableitungen

$L_x(x, y, \lambda) = 6x - 2y + \lambda$
$L_y(x, y, \lambda) = 2y - 2x - 100 + \lambda$
$L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 1.000$
$L_{xx}(x, y\lambda) = 6$
$L_{yy}(x, y, \lambda) = 2$
$L_{xy}(x, y, \lambda) = -2$

d) Notwendige Bedingung für stationäre Punkte:

I $\quad L_x(x, y, \lambda) = 6x - 2y + \lambda = 0$
II $\quad L_y(x, y, \lambda) = 2y - 2x - 100 + \lambda = 0$
III $\quad L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 1.000 = 0$

I-II: $8x - 4y + 100 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{8x+100}{4} = 2x + 25$
Einsetzen in III: $x + 2x + 25 = 1.000 \Leftrightarrow x = 325$
Also ist $y = 2 \cdot 325 + 25 = 675$.
(Hier nicht erforderlich, aber der Vollständigkeit halber:
Einsetzen in I: $6 \cdot 325 - 2 \cdot 675 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -600$
$\Rightarrow$ stationärer Punkt $(325, 675, -600)$)

Hinreichende Bedingung:
Es ist hier $D(x, y, \lambda) = L_{xx}(x, y, \lambda) \cdot L_{yy}(x, y, \lambda) - (L_{xy}(x, y, \lambda))^2 = 6 \cdot 2 - (-2)^2 = 8 > 0$ stets.
Weiterhin ist $L_{xx}(x, y, \lambda) = 6 > 0$ stets, also liegt ein globales Minimum der Funktion A unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $x + y = 1.000$ im Punkt $(x, y) = (325, 675)$ vor.

e) $A(325, 675) = 500.000$

Lösung zu Aufgabe 4

a) $k = 2$ Jahre

$\gamma = 3$ Monate plus (13+11) Tage $= \dfrac{90}{360} + \dfrac{24}{360} = \dfrac{114}{360}$

$K_n = 100\,000 \cdot 1{,}036^2 \cdot \left(1 + \dfrac{114}{360} \cdot 0{,}036\right) = 108\,553{,}16$

; d.h. das Kapital wächst auf 108 553,16 GE an.

b) $\gamma_1 = 11$ Monate plus 13 Tage $= \dfrac{330}{360} + \dfrac{13}{360} = \dfrac{343}{360}$

$k=$ ein Jahr

$\gamma_2 = 4$ Monate plus 11 Tage $= \dfrac{120}{360} + \dfrac{11}{360} = \dfrac{131}{360}$

$K_n = 100\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{343}{360} \cdot 0{,}036\right) \cdot 1{,}036 \cdot \left(1 + \dfrac{131}{360} \cdot 0{,}036\right) = 108\,557{,}19$

; d.h. das Kapital wächst auf 108 557,19 GE an.

c) $m = 360$ und $n \cdot m = 720 + 114 = 834$ Tage

$K_n = 100\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}036}{360}\right)^{834} = 108\,697{,}20$

; d.h. das Kapital wächst auf 108 697,20 GE an.

d) $K_n = 100\,000 \cdot 1{,}036^{2+\frac{114}{360}} = 108\,538{,}40$

; d.h. das Kapital wächst auf 108 538,40 GE an.

Lösung zu Aufgabe 5

a.1) $K_5 = 10\,000 \cdot 1{,}008^5 - 100(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}008)\dfrac{1{,}008^3 - 1}{0{,}008} = 6\,761{,}85$

d.h. der Kontostand am 31.12.2021 beträgt 6 761,85 GE.

a.2) $K_9 = 6\,761{,}85 \cdot 1{,}008^4 + 500(4 + 1{,}5 \cdot 0{,}008)\dfrac{1{,}008^2 - 1}{0{,}008} = 11\,008{,}89$

d.h. der Kontostand am 31.12.2025 beträgt 11 008,89 GE.

b) $K_{11} = K_9 \cdot 1{,}008^2 = 11\,185{,}73$

$n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{11\,185{,}73}{900 \cdot 1{,}008} \cdot 0{,}008\right]}{\ln 1{,}008} = 13{,}03$

d.h. volle 13 Jahre lang sind die Auszahlungen möglich.

Lösung zu Aufgabe 6

a) 1. $R_0 = 20\,000 \cdot \dfrac{1{,}038^7 - 1}{0{,}038} \cdot \dfrac{1}{1{,}038^7} = 120\,933{,}36 > 100\,000$

d.h. die Investition lohnt sich.

2. $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{100\,000}{20\,000} \cdot 0{,}038\right]}{1{,}038} = 5{,}65$

d.h. die Jahresrente muss mindestens sechs Jahre bezogen werden.

b) $R_0 = 4\,950 \cdot (4 + 1{,}5 \cdot 0{,}038) \cdot \dfrac{1{,}038^7 - 1}{0{,}038} \cdot \dfrac{1}{1{,}038^7} = 121\,430{,}09 > 100\,000$

d.h. die Investition lohnt sich.

c) $K_0 = \dfrac{30\,000}{1{,}038(1 + \frac{2}{12} \cdot 0{,}038)} + \dfrac{40\,000}{1{,}038^3(1 + \frac{10}{12} \cdot 0{,}038)} + \dfrac{45\,000}{1{,}038^5(1 + \frac{4}{12} \cdot 0{,}038)} + \dfrac{25\,000}{1{,}038^6(1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}038)} = 28\,719{,}84 + 34\,667{,}98 + 36\,877{,}31 + 19\,675{,}85 =$
$119\,940{,}98 > 100\,000$

d.h. die Investition lohnt sich.

d) $x=$ Zahlung (in GE) am 1. Juni 2022

$120\,000 = \dfrac{0{,}001 \cdot x^2}{1{,}038(1 + \frac{2}{12} \cdot 0{,}038)} + 34\,667{,}98 + 36\,877{,}32 + \dfrac{x}{1{,}038^6(1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}038)} =$
$0{,}000\,957\,328\,1x^2 + 71\,545{,}29 + 0{,}789495x$

$0 = 0{,}000\,957\,328\,1x^2 + 0{,}789495x - 48\,454{,}71$

$0 = x^2 + 824{,}6859x - 50\,614\,530{,}244$

$x = -412{,}343 \pm \sqrt{170\,026{,}714 + 50\,614\,530{,}244} = -412{,}343 \pm \sqrt{50\,784\,556{,}958} =$
$-412{,}343 \pm 7\,126{,}328$

$x = -7\,538{,}726 \notin$ Def.bereich oder $x = 6\,714{,}04$

d.h. die gesuchte Zahlung beträgt 6 714,04 GE.