Wirtschaftsmathematik-Klausur vom 03.07.2013
Finanzmathematik-Klausur vom 10.07.2013

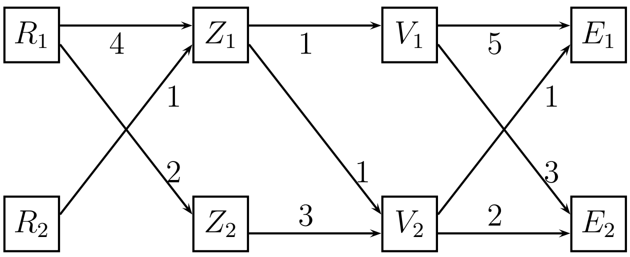
Aufgabe 1

a) Mit einem mehrstufigen Produktionsprozess stellt ein Unternehmen aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 her. Der Gesamtbedarf (in ME) pro Einheit Endprodukt ist jeweils:

	E_1	E_2	E_3
R_1	1	1	2
R_2	2	3	0
R_3	1	3	1

Das Unternehmen hat 22 Einheiten R_1, 14 Einheiten R_2 und 18 Einheiten R_3 auf Lager. Wie viele Einheiten der verschiedenen Endprodukte lassen sich daraus produzieren, wenn die Rohstoffe komplett verbraucht werden sollen?

b) Bei einem dreistufigen Produktionsprozess werden aus Rohstoffen R_1 und R_2, Zwischenprodukte Z_1 und Z_2, daraus Vorprodukte V_1 und V_2 und schließlich Endprodukte E_1 und E_2 gemäß folgender Matrialflussgrafik hergestellt:



Geben Sie die Gesamtbedarfsmatrix an.

Aufgabe 2

Ein Unternehmen produziert zwei ähnliche Produkte und setzt davon die Mengen x und y zu den Preisen

$$p_1(x,y) = 300 - x - y \quad \text{und} \quad p_2(y) = 900 - 4y; \;\; x,y \in [0;150]$$

GE ab. Die Umsatzfunktion lautet somit

$$U(x,y) = 300x - x^2 - xy + 900y - 4y^2; \;\; x,y \in [0;150].$$

Das Unternehmen möchte den Umsatz maximieren.

a) Bestimmen Sie daher das globale Maximum der Umsatzfunktion.

b) Zu welchen Preisen p_1 und p_2 muss das Unternehmen die beiden Produkte verkaufen, damit der Umsatz maximal wird?

c) Nehmen Sie an, das erste Produkt würde vom Markt genommen. Das Unternehmen setzt also nur noch y Einheiten vom zweiten Produkt ab. Für welche Menge y ist dann der Umsatz maximal?

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to -6} \dfrac{x^2 - 3x - 54}{x + 6}$.

b) Ein Unternehmen produziert drei Produkte. Zur Bestimmung der möglichen Produktionsprogramme hat man bisher die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 100 - \frac{1}{2}x_3 \\ 40 \\ x_3 \end{pmatrix} | x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

berechnet.

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge aller nichtnegativen Lösungen.
2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge aller nichtnegativen, ganzzahligen Lösungen.

c) Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$r(x, y) = \sqrt{x} + y^2; \quad x, y > 0.$$

Die sogenannte Skalenelastizität ist die Summe der partiellen Elastizitäten

$$\varepsilon_x(x, y) + \varepsilon_y(x, y) = \frac{x}{r(x, y)} r_x(x, y) + \frac{y}{r(x, y)} r_y(x, y).$$

Die Skalenelastizität gibt an, um wie viel Prozent sich der Funktionswert ungefähr ändert, wenn alle Variablen um ein Prozent steigen. Bestimmen Sie die Skalenelastizität der Produktionsfunktion in $(x, y) = (4, 1)$.

Aufgabe 4

Gegeben sei die folgende Rente:

- Laufzeit: 10 Jahre
- Zahlweise: jährlich vorschüssig
- Datum der ersten Rentenrate: 01.01.2014
- Rentenrate: 1 500 €

Diese Rente soll umgewandelt werden

a) in eine fünf Jahre lang monatlich nachschüssig zu zahlende Rente, erste Rentenrate fällig am 31.01.2014.

b) in eine sieben Jahre lang halbjährlich vorschüssig zu zahlende Rente, erste Rentenrate fällig am 01.01.2016.

Wie hoch ist jeweils die Höhe der Rentenrate? Gehen Sie bei Ihren Berechnungen von einem Jahreszins von 4,3% aus.

Aufgabe 5
Für einen Hauskauf nimmt eine Familie am 01.01.2014 einen Kredit in Höhe von 150 000 € auf. Als Rückzahlung werden Annuitäten in Höhe von 9 650 € vereinbart, die erste Annuität ist fällig am 31.12.2014.

a) Wie viele volle Annuitäten sind zu zahlen, wenn der Jahreszins 3,1% beträgt?

b) Wie hoch ist der Tilgungsbetrag der Annuität vom 31.12.2025, wenn der Jahreszins 3,1% beträgt?

c) Am 01.01.2020 steigen die Jahreszinsen von vorher 3,1% auf 5,2%.

   1. An welchem Datum ist die letzte volle Annuität zu zahlen?
   2. Wie hoch ist die Restzahlung ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Für e_1=ME von E_1, e_2=ME von E_2, e_3=ME von E_3 ergibt sich mit dem Gauß-algorithmus:

Zeile	e_1	e_2	e_3		Operation
1	$\boxed{1}$	1	2	22	
2	2	3	0	14	
3	1	3	1	18	
4	1	1	2	22	1
5	0	$\boxed{1}$	-4	-30	2 $-2\cdot$ 1
6	0	2	-1	-4	3 $-$ 1
7	1	1	2	22	4
8	0	1	-4	-30	5
9	0	0	7	56	6 $-2\cdot$ 5

Aus Zeile 9 ergibt sich: $7e_3 = 56 \iff e_3 = 8$.

Einsetzen in Zeile 8 ergibt: $e_2 - 4 \cdot 8 = -30 \iff e_2 = 2$.

Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $e_1 + 2 + 2 \cdot 8 = 22 \iff e_1 = 4$.

Von E_1 können 4 Einheiten, von E_2 2 Einheiten und von E_3 8 Einheiten hergestellt werden.

b) *1. Lösungsweg:*
Die Direktbedarfsmatrizen sind:

$$\begin{array}{c|c} & Z_1\,Z_2 \\ \hline R_1 & \\ R_2 & \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A \qquad \begin{array}{c|c} & V_1\,V_2 \\ \hline Z_1 & \\ Z_2 & \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = B \qquad \begin{array}{c|c} & E_1\,E_2 \\ \hline V_1 & \\ V_2 & \end{array} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = C$$

Die Gesamtbedarfsmatrix M ist

$$M = A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 32 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Lösungsweg:

Durch Abfahren der Pfade der Materialflussgrafik ergibt sich:

	E_1	E_2
R_1	30	32
R_2	6	5

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Die partiellen Ableitungen der Umsatzfunktion werden gleich null gesetzt:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & U_x(x,y) = 300 - 2x - y \stackrel{!}{=} 0 \iff y = 300 - 2x \\ \mathrm{II} & U_y(x,y) = -x + 900 - 8y \stackrel{!}{=} 0 \end{array}$$

Einsetzen von I in II ergibt:

$$-x + 900 - 8 \cdot (300 - 2x) = 0 \iff 15x = 1500 \iff x = 100$$

Dann ist $y = 300 - 2 \cdot 100 = 100$.

Einziger stationärer Punkt ist somit $(x, y) = (100, 100)$.

Für die hinreichende Bedingung gilt:

$$D(x,y) = U_{xx}(x,y)U_{yy}(x,y) - (U_{xy}(x,y))^2 =$$
$$(-2) \cdot (-8) - (-1)^2 = 15 >_{\text{immer}} 0$$

und $U_{xx}(x, y) = -2 <_{\text{immer}} 0$.

Also liegt in $(x, y) = (100, 100)$ ein globales Maximum der Umsatzfunktion.

b) Die Preise sind dann $p_1(100, 100) = 300 - 100 - 100 = 100$ GE und $p_2(100) = 900 - 4 \cdot 100 = 500$ GE.

c) Die Umsatzfunktion lautet $U(y) = 900y - 4y^2$. Wird die Ableitung gleich null gesetzt, so ergibt sich

$$900 - 8y \stackrel{!}{=} 0 \iff 8y = 900 \iff y = 112{,}5.$$

Da die zweite Ableitung immer gleich -8 und damit immer kleiner als null ist, liegt in $y = 112{,}5$ ein globales Umsatzmaximum.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Zum Faktorisieren des Zählers werden die Nullstellen des Zählers bestimmt z.B. mit Hilfe der p-q-Formel:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 54 = 0 \quad &\iff x = \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4} + 54} \\ &\iff x = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{15}{2} \\ &\iff x = 9 \text{ oder } x = -6\,. \end{aligned}$$

Damit ist:

$$\lim_{x\to -6} \frac{x^2 - 3x - 54}{x+6} = \lim_{x\to -6} \frac{(x+6)(x-9)}{x+6} = \lim_{x\to -6} (x-9) = -15.$$

b) 1. Es muss gelten

$$\begin{aligned} x_1 = &\ 100 - \tfrac{1}{2}x_3 \geq 0 \iff \tfrac{1}{2}x_3 \leq 100 \iff x_3 \leq 200 \\ x_2 = &\ 40 \geq 0 \\ x_3 \geq &\ 0 \end{aligned}$$

Insgesamt muss also $0 \leq x_3 \leq 200$ sein. Die Lösungsmenge ist also:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 100 - \frac{1}{2}x_3 \\ 40 \\ x_3 \end{pmatrix} | x_3 \in [0, 200] \right\}$$

2. Damit $100 - \frac{1}{2}x_3$ ganzzahlig ist, muss x_3 durch 2 teilbar sein. Die Lösungsmenge ist dann:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 100 - \frac{1}{2}x_3 \\ 40 \\ x_3 \end{pmatrix} | x_3 \in \{0, 2, 4, 6, \dots, 200\} \right\}$$

c) Die Skalenelastizität ist

$$\varepsilon_x(x,y) + \varepsilon_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x} + y^2} + 2y \cdot \frac{y}{\sqrt{x} + y^2}.$$

In $(x,y) = (4,1)$ ergibt sich:

$$\varepsilon_x(4,1) + \varepsilon_y(4,1) = \frac{4}{\sqrt{4} + 1^2} \frac{1}{2\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4} + 1^2} 2 \cdot 1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Lösung zu Aufgabe 4:

Barwert der vorsch. Jahresrente über 1 500 €:

$R_0 = 1\,500 \cdot 1{,}043 \cdot \dfrac{1{,}043^{10} - 1}{0{,}043} \cdot \dfrac{1}{1{,}043^{10}} = 12\,502{,}09$

a) Nachschüssige Jahresersatzrente r_J:

$12\,502{,}09 = r_J \cdot \dfrac{1{,}043^5 - 1}{0{,}043} \cdot \dfrac{1}{1{,}043^5} \Leftrightarrow r_J = 2\,832{,}018$

Nachschüssige Monatsrente r_M:

$2\,832{,}018 = r_M(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}043) \Leftrightarrow r_M = 231{,}4402$

d.h. die Monatsrente beträgt 231,44 €.

b) Barwert der halbj. Rente:

$12\,502{,}09 \cdot 1{,}043^2 = 13\,600{,}39$

Nachschüssige Jahresersatzrente r_J:

$13\,600{,}39 = r_J \cdot \dfrac{1{,}043^7 - 1}{0{,}043} \cdot \dfrac{1}{1{,}043^7} \Leftrightarrow r_J = 2\,291{,}143$

Vorschüssige Halbjahresrente r_H:

$2\,291{,}143 = r_H(2 + 1{,}5 \cdot 0{,}043) \Leftrightarrow r_H = 1\,109{,}781$

d.h. die Halbjahresrente beträgt 1 109,78 €.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{150\,000}{9\,650} \cdot 0{,}031\right]}{\ln 1{,}031} = 21{,}53741$

d.h. es sind 21 volle Annuitäten zu zahlen.

b) *1. Lösungsweg:*

$T_1 = A - K_0 \cdot 0{,}031 = 5\,000$

$T_{12} = T_1 \cdot 1{,}031^{11} = 6\,995{,}445$

2. Lösungsweg:

$K_{11} = 150\,000 \cdot 1{,}031^{11} - 9\,650 \cdot \dfrac{1{,}031^{11} - 1}{0{,}031} = 85\,630{,}82$

$Z_{12} = K_{11} \cdot 0{,}031 = 2\,654{,}555$

$T_{12} = A - Z_{12} = 6\,995{,}445$

3. Lösungsweg:

$A = T_1 \cdot 1{,}031^n \Leftrightarrow T_1 = \dfrac{A}{1{,}031^n} = \dfrac{9\,650}{1{,}031^{21{,}53741}} = 5\,000$

$T_{12} = T_1 \cdot 1{,}031^{11} = 6\,995{,}445$

d.h. die Tilgung beträgt 6 995,45€.

c) Restschuld am 01.01.2020:

$K_6 = 150\,000 \cdot 1{,}031^6 - 9\,650 \cdot \dfrac{1{,}031^6 - 1}{0{,}031} = 117\,576{,}6378$

1. $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{117\,576{,}6378}{9\,650} \cdot 0{,}052\right]}{\ln 1{,}052} = 19{,}80461$

   d.h. die letzte volle Annuität ist zu zahlen am 31.12.2038.

2. $K_{6+19} = 117\,576{,}6378 \cdot 1{,}052^{19} - 9\,650 \cdot \dfrac{1{,}052^{19} - 1}{0{,}052} = 7\,417{,}092$

   $7\,417{,}092 \cdot 1{,}052 = 7\,802{,}78$

   die Restzahlung beträgt 7 802,78 €.