Wirtschaftsmathematik-Klausur vom 04.02.2015 und Finanzmathematik-Klausur vom 27.01.2015

Bearbeitungszeit: W-Mathe 60 Minuten und F-Mathe 45 Min

Aufgabe 1

a) Für die Absatzmenge x (in ME) und den Verkaufspreis p (in GE pro ME) lautet die Preis-Absatz-Funktion eines bestimmten Unternehmens wie folgt:

$$x(p) = 180 - 3p$$

1. Ermitteln Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich D_x von $x(p)$.
2. Berechnen Sie die Elastizität von x an der Stelle $p = 12$ und interpretieren Sie diese.

b) Gegeben seien die Matrizen A und B durch

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Matrizenprodukte $A \cdot B$ und B^2.

c) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - 6y - 3 \quad (x, y \in \mathbb{R}) \text{ auf Sattelstellen.}$$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die nichtnegative Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lrcr} \text{I} & 7x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 28 \\ \text{II} & 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 & = & 15 \\ \text{III} & -3x_1 - 41x_2 + 25x_3 & = & -47 \end{array}$$

b) In einem Produktionsprozess werden aus drei Rohmaterialien R_1, R_2, R_3 die Endprodukte E_1, E_2, E_3 hergestellt. Die Rohmaterialkosten für jeweils eine ME der Endprodukte betragen 140 GE für E_1, 135 GE für E_2 und 91 GE für E_3. Der Gesamtbedarf an Rohmaterial für jeweils eine ME der Endprodukte ist wie folgt:

	E_1	E_2	E_3
R_1	5	8	9
R_2	11	10	3
R_3	7	5	4

Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit dem die Kosten pro ME der Rohmaterialien berechnet werden könnten? (Keine Berechnung des Gleichungssystems!)

Der Student Luigi Lagrange hat herausgefunden, dass das Klausurergebnis davon abhängt, wie er seine Lernzeit investiert. Scheinbar ergibt sich die in der Klausur

erreichte Punktezahl P nach der Funktion $P(x, y) = 100 - x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy$, wobei x die Zeit in Stunden angibt, die er pro Woche mit Lesen verbringt, und y die Zeit in Stunden, in der er Übungsaufgaben rechnet.
Da Luigi Mittelstürmer im TUS Turin 05 ist, kann er an jedem Wochenende nur zehn Stunden für die Prüfungsvorbereitung verwenden. An den anderen Wochentagen trainiert er lediglich Fußball und besucht die Vorlesungen, liest und rechnet aber nichts. Er fragt sich, wie er die Lernzeit am Wochenende auf Lesen und Rechnen verteilen soll, um möglichst viele Punkte in der anstehenden Klausur zu erreichen.

a) Stellen Sie die Nebenbedingung auf.

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

c) Berechnen Sie die erforderlichen partiellen Ableitungen für das Lagrangeverfahren.

d) Ermitteln Sie die optimale Lernzeitaufteilung pro Wochenende mit dem Lagrangeverfahren.

e) Geben Sie die maximale Punktezahl P an, die Luigi mit der optimalen Lernzeitaufteilung in der Klausur erreicht.

Aufgabe 4
Bei monatlicher Verzinsung zum relativen Zins nimmt eine Privatperson bei einer Bank die folgenden drei Kredite zu einem nominellen Jahreszins von 2,31% auf:

- 2 000 € am 31.01.2015
- 3 000 € am 31.03.2016
- 4 000 € am 31.05.2018

a) Wie hoch ist der effektive Jahreszins?

b) Wie hoch ist der Schuldenstand am 31.12.2018?

c) Am Ende eines welchen Monats übersteigt der Schuldenstand erstmals den Wert von 5 200 €?

d) Am 31.10.2017 werden 5 000 € eingezahlt. Wie hoch ist der Kontostand am 31.12.2018?

Aufgabe 5
Frau K. erhält von der Versicherung „Langes Leben“ das Angebot, ihre laufende Lebensversicherung vor Ablauf des Vertrages aufzulösen. Der Lebensversicherungsvertrag aus dem Jahr 1958 enthält folgende Konditionen:

- Beginn der Einzahlungen: 01.01.1959

- Vereinbarte monatliche Versicherungsprämie: 1 Deutsche Mark (DM)
- Zahlweise: monatlich nachschüssig
- Garantiezins: 3% p.a.

Die Versicherung bietet Frau K. an, die Lebensversicherung am 31.12.2014 aufzulösen und ihr 1 075 Euro auszuzahlen. Würde Frau K. das reguläre Ende der Versicherung abwarten, so würde die Versicherung ihr am 31.12.2018 einen Betrag in Höhe von 1 250 Euro auszahlen.

a) Rechnen Sie die Monatsprämie von DM in Euro um. Verwenden Sie dabei die Umrechnung: 1 Euro entspricht 1,95883 DM. Runden Sie das Ergebnis - wie bei Geldbeträgen üblich - auf zwei Stellen hinter dem Komma.

b) Berechnen Sie den Barwert der Versicherungsprämien (in Euro) zum 01.01.1959, wenn Frau K. bis zum 31.12.2018 in die Lebensversicherung einbezahlen würde. Verwenden Sie als Rechnungszins den o.g. Garantiezins von 3% p.a.

c) Frau K. beendet die Versicherung am 31.12.2014 und lässt sich den Betrag 1 075 Euro auszahlen. Berechnen Sie den Endwert aller gezahlten Versicherungsprämien in Euro. Verwenden Sie als Rechnungszins den o.g. Garantiezins von 3% p.a.

d) Frau K. beendet die Versicherung am 31.12.2014 und lässt sich den Betrag 1 075 Euro auszahlen. Beurteilen Sie, ob die Entscheidung von Frau K. ökonomisch sinnvoll ist. Berechnen Sie dazu:

   - den Endwert der im Zeitraum 01.01.2015 bis 31.12.2018 noch ausstehenden Prämienzahlungen.
   - den auf den 31.12.2018 aufgezinsten Auszahlungsbetrag (31.12.2014: 1 075 Euro).

   Verwenden Sie bei der Berechnung der beiden Beträge als Rechnungszins einen derzeit realistischen Sparzins in Höhe von 1% p.a.
   Vergleichen Sie zur Beurteilung der Entscheidung von Frau K. die Summe dieser beiden Beträge mit dem möglichen Auszahlungsbetrag zum 31.12.2018. Ist die Entscheidung von Frau K. ökonomisch sinnvoll?

Lösung Aufgabe 1

a) 1) $x(p) \geq 0 \Leftrightarrow p \leq 60$
   $\Rightarrow D_x = [0; 60]$ Definitionsbereich

   2) Elastizität: $\epsilon_x(p) = x'(p) \cdot \dfrac{p}{x(p)}$
   $x'(p) = -3$
   Für $p = 12$ gilt: $\epsilon_x(12) = (-3) \cdot \dfrac{12}{144} = -0,25$
   Interpretation: Bei einer Preissteigerung um 1% (von 12 GE auf $12,12$ GE) sinkt der Absatz x um $0,25\%$ (unelastisches Verhalten).

b) $A \cdot B = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3a+2 \\ 3 & a+2 \\ 4 & 4a \end{pmatrix}$

$B^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1+a & 2a \\ 2 & 1+a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

c) partielle Ableitungen
$f_x(x,y) \ = 2x + 2y$
$f_y(x,y) \ = -2y + 2x - 6$
$f_{xx}(x,y) = 2$
$f_{yy}(x,y) = -2$
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & f_x(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow & 2x + 2y = 0 \\ \text{II} & f_y(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow & -2y + 2x - 6 = 0 \end{array}$$

I+II: $2x + 2x - 6 = 4x - 6 = 0$
$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$
Einsetzen in II: $-2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}$

$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = 2 \cdot (-2) - 2^2 = -8 < 0$
$\Rightarrow (x_0, y_0) = (\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$ ist Sattelstelle von f.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	7	-1	5	28	
2	$\boxed{2}$	8	-4	15	
3	-3	-41	25	-47	
4	2	8	-4	15	2
5	0	$\boxed{-58}$	38	-49	$2 \cdot$ 1 $-7 \cdot$ 2
6	0	-58	38	-49	$2 \cdot$ 3 $+3 \cdot$ 2
7	2	8	-4	15	4
8	0	-58	38	-49	5
9	0	0	0	0	6 $-$ 5

Zeile 8: $-58x_2 + 38x_3 = -49 \iff x_2 = \frac{49}{58} + \frac{38}{58}x_3$.

Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $2x_1 + 8 \cdot \left(\frac{49}{58} + \frac{38}{58}x_3\right) - 4x_3 = 15 \iff x_1 = \frac{239}{58} - \frac{36}{58}x_3$.

Damit $x_1 \geq 0$ gilt, muss die folgende Ungleichung erfüllt sein:
$x_1 = \frac{239}{58} - \frac{36}{58}x_3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{239}{58} \geq \frac{36}{58}x_3 \Leftrightarrow \frac{239}{36} \geq x_3 \Leftrightarrow x_3 \leq 6{,}63\overline{8}$.
Da $x_3 \geq 0$ gelten muss, ergibt sich die nichtnegative $\mathbb{L}$ wie folgt:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{239}{58} - \frac{36}{58}x_3 \\ \frac{49}{58} + \frac{38}{58}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in [0; 6{,}63\overline{8}] \right\}$$

b) q_1=GE pro ME von R_1, q_2=GE pro ME von R_2, q_3=GE pro ME von R_3

$$\begin{array}{rrcl} \text{I} & 5q_1 + 11q_2 + 7q_3 & = & 140 \\ \text{II} & 8q_1 + 10q_2 + 5q_3 & = & 135 \\ \text{III} & 9q_1 + 3q_2 + 4q_3 & = & 91 \end{array}$$

a) $x + y = 10$

b) $L(x, y, \lambda) = 100 - x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy + \lambda(x + y - 10)$

c) partielle Ableitungen
$L_x(x, y, \lambda) = -2x + y + \lambda$
$L_y(x, y, \lambda) = -y + x + \lambda$
$L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 10$
$L_{xx}(x, y\lambda) = -2$
$L_{yy}(x, y, \lambda) = -1$
$L_{xy}(x, y, \lambda) = 1$

d) Notwendige Bedingung für stationäre Punkte:

$$\begin{array}{rl} \text{I} & L_x(x, y, \lambda) = -2x + y + \lambda = 0 \\ \text{II} & L_y(x, y, \lambda) = -y + x + \lambda = 0 \\ \text{III} & L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 10 = 0 \end{array}$$

I-II: $-3x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x$
Einsetzen in III: $x + \frac{3}{2}x = 10 \Leftrightarrow x = 4$
Also ist $y = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$.
(Hier nicht erforderlich, aber der Vollständigkeit halber:
Einsetzen in I: $-2 \cdot 4 + 6 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$
$\Rightarrow$ stationärer Punkt $(4, 6, \lambda_0 = 2)$)

Hinreichende Bedingung:
Es ist hier $D(x, y, \lambda_0) = L_{xx}(x, y, \lambda_0) \cdot L_{yy}(x, y, \lambda_0) - (L_{xy}(x, y, \lambda_0))^2 = -2 \cdot (-1) - 1^2 = 1 > 0$ stets.
Weiterhin ist $L_{xx}(x, y, \lambda_0) = -2 < 0$ stets, also liegt ein globales Maximum der Funktion P unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $x + y = 10$ im Punkt $(x, y) = (4, 6)$ vor.

e) $P(4, 6) = 100 - 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 = 90$

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $j = \left(1 + \dfrac{0{,}0231}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}023346$
d.h. der effektive Jahreszins beträgt 2,3346 %.

b) $K_n = 2\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0231}{12}\right)^{47} + 3\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0231}{12}\right)^{33} + 4\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}0231}{12}\right)^{7} = 9\,439{,}97$
d.h. der Schuldenstand beträgt 9 439,97 €.

c) Schuldenstand am 31.03.2016:

$$2\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0231}{12}\right)^{14} + 3\,000 = 5\,054{,}58$$

$$n = \frac{\ln \frac{5\,200}{5\,054{,}58}}{\ln 1{,}023346} = 1{,}229062$$

0,229062 Jahre = $0{,}229062 \cdot 12 = 2{,}74$ Monate
d.h. nach einem Jahr und drei Monaten, also am 30.06.2017.

d) $$5\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0231}{12}\right)^{14} - 9\,439{,}97 = -4\,303{,}52$$

d.h. der Kontostand beträgt $-4\,303{,}52$ €

Lösung zu Aufgabe 5:

a) Monatlich nachschüssige Zahlungen in Euro:
Dreisatz: 1,95583 DM $\widehat{=}$ 1 Euro $\Leftrightarrow$ 1 DM $\widehat{=} \frac{1}{1{,}95583} = 0{,}51$ Euro

b) Nachschüssige Jahres-Ersatzrente $r_J = 0{,}51 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}03) = 6{,}20415$ Euro
Barwert $R_0 =$?
Laufzeit: 1959 und 1960 = 2 Jahre, 1961 bis 2010 = 50 Jahre, 2011 bis 2018 = 8 Jahre, Summe = 60 Jahre

$$R_0 = 6{,}20415 \cdot \frac{1{,}03^{60} - 1}{0{,}03} \cdot \frac{1}{1{,}03^{60}} = 171{,}7033 \approx 171{,}70 \text{ Euro}$$

c) Laufzeit: 60 Jahre minus 4 Jahre = 56 Jahre

$$\text{Endwert } R_{56} = 6{,}20415 \cdot \frac{1{,}03^{56} - 1}{0{,}03} = 875{,}7392 \approx 875{,}74 \text{ Euro}$$

d) Nachschüssige Jahres-Ersatzrente $r_J = 0{,}51 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}01) = 6{,}14805$ Euro

- Endwert $R_4 = 6{,}20415 \cdot \frac{1{,}01^4 - 1}{0{,}01} = 25{,}19134 \approx 25{,}19$ Euro
- $K_4 = 1\,075 \cdot 1{,}01^4 = 1\,118{,}649 \approx 1\,118{,}65$ Euro

Summe der beiden Beträge: $25{,}19 + 1\,118{,}65 = 1\,143{,}84$
d.h. würde Frau K. den Vertrag vorzeitig beenden und gleichzeitig die ursprünglich vereinbarten Monatsprämien zusammen mit dem vorzeitigen Auszahlungsbetrag auf ein Sparkonto legen, so hätte sie am ursprünglich vereinbartem Vertragsende 1 143,84 Euro zur Verfügung.

Der mögliche Auszahlungsbetrag beträgt gemäß dem Versicherungsvertrag 1 250 Euro. Somit wäre dieser Auszahlungsbetrag größer als das oben berechnete Geld auf dem Sparkonto in Höhe von nur 1 143,84 Euro. Insofern ist die Entscheidung von Frau K. ökonomisch betrachtet nicht sinnvoll.