# QM I (W-Mathe)-Klausur am 06.07.2016

**Aufgabe 1**

a) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 5} \frac{3x^2 - 36x + 105}{4x - 20}$$

b) Die Preis-Absatz Funktion eines Unternehmens sei gegeben durch:

$$x(p) = 18 - 0{,}6p$$

1. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Preis-Absatz Funktion $x(p)$.
2. Berechnen Sie die Preiselastizität, d.h. die Elastizität der Funktion $x(p)$, an der Stelle $p_0 = 11$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Eine Woche vor dem Klausurtermin beginnt ein Student mit den Vorbereitungen. Die Anzahl $P$ der Punkte, die er in der Klausur - in Abhängigkeit der pro Tag an die Vorbereitung verwendeten Stunden $x \in [0; 24]$ - erzielen wird, beträgt voraussichtlich:

$$P(x) = 2\sqrt{6x} - x + 94$$

Bestimmen Sie die Vorbereitungszeit (in Stunden pro Tag), die zu einer maximalen Punktzahl führt. Welche maximale Punktzahl erzielt der Student bei dieser Vorbereitungszeit?

**Aufgabe 2**

In einem Produktionsprozess werden aus den drei Rohmaterialien $R_1, R_2, R_3$ drei Endprodukte $E_1, E_2, E_3$ hergestellt. Der Bedarf (in ME) an Rohmaterialien für jeweils eine ME der Endprodukte lautet wie folgt:

| | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
|---|---|---|---|
| $R_1$ | 10 | 1 | 10 |
| $R_2$ | 40 | 5 | 30 |
| $R_3$ | 50 | 6 | 40 |

An Vorrat im Lager liegen folgende ME des Rohmaterials:

| | Vorrat |
|---|---|
| $R_1$ | 350 |
| $R_2$ | 1 350 |
| $R_3$ | 1 700 |

Bestimmen Sie, wie viele ME der Endprodukte sich aus dem Vorrat herstellen lassen, wenn der gesamte Vorrat verbraucht werden soll. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Stellen Sie das Gleichungssystem auf

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems

c) Bestimmen Sie alle nichtnegativen Lösungen

d) Bestimmen Sie alle ganzzahligen nichtnegativen Lösungen

e) Geben Sie eine spezielle ganzzahlige nichtnegative Lösung an.

**Aufgabe 3**

a) Es sei $a \in (0;2)$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + axy + y^2 \quad ,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

an der Stelle $(x,y) = (0,0)$ das absolute (globale) Minimum annimmt.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} \quad ,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

an der Stelle $(x,y) = (0,0)$ ein streng relatives (lokales) Minimum hat.

*Lösung zu Aufgabe 1:*

a) Durch Einsetzten von $x = 5$ ergibt sich: Nenner=0=Zähler

*1. Lösungsweg:* (Regel von de l'Hôpital)

$$\lim_{x\to 5} \frac{3x^2 - 36x + 105}{4x - 20} = \lim_{x\to 5} \frac{6x - 36}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

*2. Lösungsweg:* (Faktorisieren und Kürzen)

$$\lim_{x\to 5} \frac{3(x-5)(x-7)}{4(x-5)} = \lim_{x\to 5} \frac{3(x-7)}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

b) 1.

| $x$ | $p$ |
|---|---|
| 18 | 0 |
| 0 | 30 |

d.h. $p \in [0;30]$

2. $x(11) = 11{,}4$

$x'(p) = -0{,}6$

$\varepsilon_x(11) = (-0{,}6) \cdot \dfrac{11}{11{,}4} = -0{,}57895\ldots$ d.h. steigt der Preis von 11 GE um ein Prozent, so sinkt der Absatz um etwa 0,58%.

c) $(\sqrt{6x})' = (\sqrt{6} \cdot x^{0{,}5})' = \sqrt{6} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$0 = P'(x) = 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \mid \cdot\sqrt{x}$$

$$0 = \sqrt{6} - \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{6} \Leftrightarrow x = 6$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = (x^{-0{,}5})' = -0{,}5 \cdot x^{-1{,}5} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3}}$$

$$P''(x) = \sqrt{6} \cdot -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3}} = -\frac{\sqrt{1{,}5}}{\sqrt{x^3}} <_{\text{immer}} 0$$

d.h. $x = 6$ globale Maximalstelle

$P(6) = 2 \cdot \sqrt{36} - 6 + 94 = 18 - 6 + 94 = 100$ d.h. der Student würde mit einem Einsatz von sechs Stunden pro Tag 100 Punkte in der Klausur erzielen.

*Lösung zu Aufgabe 2:*

a) $e_1$=ME von $E_1$, $e_2$=ME von $E_2$, $e_3$=ME von $E_3$

Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcr} \text{I} & 10e_1 + e_2 + 10e_3 & = & 350 \\ \text{II} & 40e_1 + 5e_2 + 30e_3 & = & 1\,350 \\ \text{III} & 50e_1 + 6e_2 + 40e_3 & = & 1\,700 \end{array}$$

b) Gaußalgorithmus:

| Zeile | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | | Operation |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\boxed{10}$ | 1 | 10 | 350 | |
| 2 | 40 | 5 | 30 | 1 350 | |
| 3 | 50 | 6 | 40 | 1 700 | |
| 4 | 10 | 1 | 10 | 350 | 1 |
| 5 | 0 | $\boxed{1}$ | $-10$ | $-50$ | 2$-4\cdot$1 |
| 6 | 0 | 1 | -10 | $-50$ | 3$-5\cdot$1 |
| 7 | 10 | 1 | 10 | 350 | 4 |
| 8 | 0 | 1 | -10 | $-50$ | 5 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6$-$5 |

8 $\quad e_2 - 10e_3 = -50 \Leftrightarrow x_2 = 10e_3 - 50$

7 $\quad 10e_1 + 10e_3 - 50 + 10e_3 = 350 \Leftrightarrow 10e_1 = 400 - 20e_3 \Leftrightarrow e_1 = 40 - 2e_3$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich somit wie folgt:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 40 - 2e_3 \\ 10e_3 - 50 \\ e_3 \end{pmatrix}; e_3 \in \mathbb{R} \}$$

c) $e_1 = 40 - 2e_3 \geq 0 \Leftrightarrow 40 \geq 2e_3 \Leftrightarrow 20 \geq e_3 \Leftrightarrow e_3 \leq 20$

$e_2 = 10e_3 - 50 \geq 0 \Leftrightarrow 10e_3 \geq 50 \Leftrightarrow e_3 \geq 5$

$e_3 \geq 0$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich somit wie folgt:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 40 - 2e_3 \\ 10e_3 - 50 \\ e_3 \end{pmatrix}; e_3 \in [5; 20] \}$$

d) $$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 40 - 2e_3 \\ 10e_3 - 50 \\ e_3 \end{pmatrix}; e_3 \in \{5, 6, 7, \ldots, 20\} \}$$

e) Für z.B. $e_3 = 5$ ergeben sich $e_2 = 10 \cdot 5 - 50 = 0$ und $e_1 = 40 - 2 \cdot 5 = 30$.

*Lösung zu Aufgabe 3*

a) $f_x(x,y) = 2x + ay \quad f_{xx}(x,y) = 2$

$f_y(x,y) = ax + 2y \quad f_{yy}(x,y) = 2$

$f_{xy}(x,y) = a$

Notwendige Bedingung:

Für $x = 0$ und $y = 0$ gilt:

I $\quad 2 \cdot 0 + a \cdot 0 = 0$

II $\quad a \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$

d.h. $(0,0)$ ist ein stationärer Punkt.

Hinreichende Bedingung:

Für $a \in (0;2)$ gilt: $a^2 \in (0;4)$. Somit haben wir:

$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - [(f_{xy}(x,y]]^2 = 2 \cdot 2 - a^2 >_{\text{immer}} 0$

$f_{xx}(x,y) = 2 >_{\text{immer}} 0$; d.h. (0;0) globale Minimalstelle.

b) $f_x(x,y) = 2x \cdot e^{x^2+y^2} \quad f_{xx}(x,y) = 2 \cdot e^{x^2+y^2} + 2x \cdot 2x \cdot e^{x^2+y^2} = e^{x^2+y^2}(2+4x^2)$

$f_y(x,y) = 2y \cdot e^{x^2+y^2} \quad f_{yy}(x,y) = e^{x^2+y^2}(2+4y^2)$

$f_{xy}(x,y) = 4xy \cdot e^{x^2+y^2}$

Notwendige Bedingung:

Für $x = 0$ und $y = 0$ gilt:

I $\quad 2 \cdot 0 \cdot e^0 = 0$

II $\quad 2 \cdot 0 \cdot e^0 = 0$

d.h. $(0,0)$ ist ein stationärer Punkt.

Hinreichende Bedingung:

$D(0,0) = (2 \cdot e^0 + 0 \cdot e^0)^2 - 0 \cdot e^0 = 2^2 = 4 > 0$

$f_{xx}(0,0) = 2 > 0$; d.h. (0;0) lokale Minimalstelle.

# QM II-Klausur am 07.07.2016

**Aufgabe 1**
Einem Immobilienmogul wird in Köln ein Hochhaus zum Kauf angeboten. Der Kaufpreis liegt bei 10 Mio. Euro. Es ist davon auszugehen, dass das Hochhaus noch für 25 Jahre genutzt werden kann, bevor es (ohne Kosten) abgerissen werden muss. Der Zinssatz liegt bei 3%.

a) Bestimmen Sie die Höhe der jährlich nachschüssigen Annuität, die aus der Vermietung des Hochhauses erwirtschaftet werden muss, damit sich der Kauf des Hochhauses lohnt.

b) Der Immobilieninvestor möchte vor dem Kauf der Immobilie gerne einen Abschreibungsplan für die Immobilie studieren. Die Abschreibung der Immobilie soll gemäß der geometrisch-degressiven mit Übergang zur linearen Abschreibung erfolgen. Der Abschreibungssatz wird auf 10% festgelegt. Gehen Sie von einer Nutzungsdauer von 25 Jahren aus.

   1. In welchem Jahr soll die Abschreibung von der geometrisch-degressiven auf die lineare Abschreibung umgestellt werden?
   2. Stellen Sie den Abschreibungsplan für die ersten drei Jahre auf.

c) Eine Familie möchte im Zuge des möglichen Eigentümerwechsels des Hochhauses gerne die selbst genutzte Wohnung kaufen. Die Familie zahlt eine Miete von 1.000 Euro am Ersten eines jeden Monats und bietet 300.000 Euro für die derzeit gemietete Wohnung. Ist das Angebot aus Sicht des Verkäufers lukrativ, so dass sich ein Verkauf der Wohnung finanziell lohnt?

*Lösung zu Aufgabe 1:*

a) $A = 10\,000\,000 \cdot 1{,}03^{25} \cdot \dfrac{0{,}03}{1{,}03^{25} - 1} = 574\,278{,}71$

b) 1. $x \geq n + 1 - \dfrac{1}{a} = 25 + 1 - \dfrac{1}{0{,}1} = 26 - 10 = 16$
   d.h. im 16. Jahr sollte erstmals linear abgeschrieben werden.

   2.

| Jahr | A-Betrag | Buchwert |
|---|---|---|
| 1 | 1 000 000 | 9 000 000 |
| 2 | 900 000 | 8 100 000 |
| 3 | 810 000 | 7 290 000 |

c) $R_0 = 1\,000(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}03) \cdot \dfrac{1{,}03^{25} - 1}{0{,}03} \cdot \dfrac{1}{1{,}03^{25}} = 212\,353{,}34$

$R_0 < 300\,000$

d.h. der Immobilienmogul sollte verkaufen.

# F-Mathe-Klausur am 07.07.2016

**Aufgabe 1**

a) Ein Unternehmen zahlt seit jeher für jeden Arbeitnehmer am Jahresende 1.435,95 Euro in die betriebliche Rentenkasse ein. Auf die Betriebsrente wird ein Zins von 4% erwirtschaftet. Herr Meier scheidet im Alter von 65 Jahren am 31.12.2015 aus dem Unternehmen aus. Unterstellen Sie bei Ihren Rechnungen einen einheitlichen Zins von 4%.

1. Ermitteln Sie, wie lange Herr Meier im Unternehmen angestellt war, wenn er eine monatlich nachschüssige Betriebsrente für 25 Jahre in Höhe von 1.000 Euro erhält.
2. Welchen einmaligen Betrag hätte das Unternehmen zum Beschäftigungsbeginn von Herrn Meier zum Zinssatz von 4% anlegen müssen, damit Herr Meier zum 31.12.2015 die genannte Rente in Höhe von 1.000 Euro für 25 Jahre beziehen kann?
*Hinweis: Für den Fall, dass Sie Aufgabe a.1) nicht beantwortet haben, nehmen Sie an, dass Herr Meier 47 Jahre im Unternehmen beschäftigt war.*

b) Herr Meier hat neben der Betriebsrente auch privat für seinen Ruhestand vorgesorgt. Dabei hat ihm insbesondere eine größere Erbschaft am 31.12.2005 in Höhe von 500.000 Euro geholfen. Bestimmen Sie, auf welchen Betrag die 500.000 Euro bis zum 31.12.2015 angewachsen sind, wenn Herr Meier das Kapital zu einer stetigen Verzinsung mit einem Zinssatz von 2% anlegen konnte.

c) Herr Meier kauft am 31.12.2015 für seinen Ruhestand eine Wohnung zum Preis von 200.000 Euro. Er hat die Wohnung über einen Kredit mit einem Jahreszins von 4% finanziert. Mit der Bank hat Herr Meier eine Annuitäten-Tilgung vereinbart, bei der er zu jedem Jahresende 14.716,35 Euro an die Bank zahlt. Berechnen Sie, wie lange Herr Meier die volle Annuität zahlen muss.

**Aufgabe 2**
Es bestehen folgende Zahlungsverpflichtungen:

- 30 000 € am 31.07.2016
- 20 000 € am 31.03.2018
- 10 000 € am 31.05.2021

Diese Zahlungsverpflichtungen sollen umgeschuldet werden durch zwei gleich große Rückzahlungen am 31.07.2016 und am 31.12.2020. Wie hoch sind zu einem Jahreszins von 2,1 % diese beiden Zahlungen

a) bei linearer Verzinsung (Bewertungsstichtag 31.07.2016)?

b) bei relativ gemischter Verzinsung (Bewertungsstichtag 31.07.2016)?

c) bei konformer Verzinsung?

*Lösung zu Aufgabe 1:*

a) 1. $R_0 = 1\,000(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^{25} - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^{25}} = 190\,901{,}82$

$$n = \frac{\ln[1 + \frac{190\,901{,}82}{1\,435{,}95} \cdot 0{,}04]}{\ln 1{,}04} = 46{,}99987 \approx 47 \text{ Jahre}$$

2. $\dfrac{R_0}{1{,}04^{47}} = 30\,216{,}43$
d.h. das Unternehmen hätte 30 216,43 Euro anlegen müssen.

b) $K_{10} = 500\,000 \cdot e^{10 \cdot 0{,}02} = 610\,701{,}38$
d.h das Guthaben wäre auf 610 701,38 Euro angewachsen.

c) $n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{200\,000}{14\,716{,}35} \cdot 0{,}04]}{\ln 1{,}04} = 20$
d.h. die volle Annuität ist 20 Jahre lang zu zahlen.

*Lösung zu Aufgabe 2:*

a) Wert der Zahlungsverpflichtungen am 31.07.2016:
$$30\,000 + \frac{20\,000}{1 + 1\frac{8}{12} \cdot 0{,}021} + \frac{10\,000}{1 + 4\frac{10}{12} \cdot 0{,}021} = 58\,402{,}20$$
$$58\,402{,}20 = x + \frac{x}{1 + 4\frac{5}{12} \cdot 0{,}021} = x + 0{,}9151224x = 1{,}9151224x \Leftrightarrow x = 30\,495{,}28$$
d.h. die beiden Rückzahlungen betragen jeweils 30 495,28 €.

b) Wert der Zahlungsverpflichtungen am 31.07.2016:
$$30\,000 + \frac{20\,000}{1{,}021 \cdot (1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}021)} + \frac{10\,000}{1{,}021^4 \cdot (1 + \frac{10}{12} \cdot 0{,}021)} = 58\,362{,}23$$
$$58\,362{,}23 = x + \frac{x}{1{,}021^4 \cdot (1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}021)} = x + 0{,}9122492x = 1.9122492x \Leftrightarrow x = 30\,520{,}20$$
d.h. die beiden Rückzahlungen betragen jeweils 30 520,20 €.

c) Wert der Zahlungsverpflichtungen am 31.07.2016:
$$30\,000 + \frac{20\,000}{1{,}021^{1\frac{8}{12}}} + \frac{10\,000}{1{,}021^{4\frac{10}{12}}} = 58\,363{,}42$$
$$58\,363{,}42 = x + \frac{x}{1{,}021^{4\frac{5}{12}}} = x + 0{,}9122971x = 1{,}9122971x \Leftrightarrow x = 30\,520{,}06$$
d.h. die beiden Rückzahlungen betragen jeweils 30 520,06 €.