Wirtschaftsmathematik-Klausur vom 07.02.2014 und Finanzmathematik-Klausur vom 27.01.2014

Bearbeitungszeit: W-Mathe 60 Minuten, F-Mathe 45 Minuten

Aufgabe 1

Gegeben sind in Abhängigkeit der produzierten und abgesetzten Menge x folgende Preis-Absatz Funktion:

$$p(x) = 1\,200 - 10x$$

und folgende Kostenfunktion:

$$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 40x^2 + 1\,700x + 666\frac{2}{3} \;\; ; x \geq 0.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Preis-Absatz Funktion $p(x)$.

b) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion und ihren Definitionsbereich.

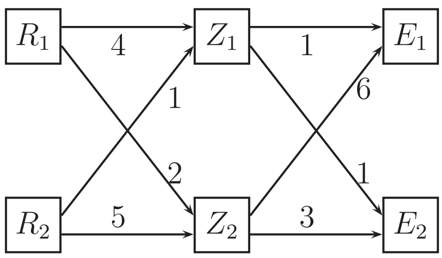
c) Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

I	$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 12$
II	$7x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 5$
III	$9x_1 + 10x_2 + x_3 = -2$

b) Gegeben ist für einen zweistufigen Produktionsprozess die folgende Materialflussgrafik:



Geben Sie die Gesamtbedarfsmatrix an.

Aufgabe 3

a) Ermitteln Sie das Minimum unter Berücksichtigung der Nebenbedingung für die folgende vorgegebene Lagrangefunktion:

$$L(x, y, \lambda) = 8x + 24y + \lambda(x^2 + 2y^2 - 22) \text{ mit } x \neq 0, y \neq 0$$

Handelt es sich um ein lokales oder globales Minimum?

b) Ein Unternehmen stellt Kölschstangen her, also zylindrische Gläser für Kölsch. Die Kölschstangen sollen bis zur Oberkante genau 240 cm^3 Flüssigkeit fassen, bis

zum Eichstrich genau 200 cm^3.
Stellen Sie die Lagrange-Funktion zur folgenden Fragestellung auf:
Welche Abmessungen sollte die Kölschstange besitzen, wenn bei einer vorgegebenen Glasdicke der Verbrauch an Material zur Herstellung (also die Glasoberfläche) minimal sein soll?
Hinweis: Die Lösungen der Lagrange-Funktion müssen <u>*nicht*</u> *ermittelt werden.*
Erinnerung: Die Kreisfläche berechnet sich aus dem Radius r nach der Formel $A = \pi r^2$, der Kreisumfang ist $U = 2\pi r$. Das Volumen eines Zylinders ergibt sich aus dem Produkt von Höhe und Grundfläche.

Aufgabe 4
Ein Unternehmen nimmt zur Finanzierung einer Maschine bei der XYZ-Bank einen Kredit zu folgenden Konditionen auf:

- Kreditsumme: 100 000 €
- Auszahlungsdatum des Kredits: 01.01.2012
- Jahreszins: 2,88%
- Monatlich nachschüssige Zahlung an die XYZ-Bank für Tilgung und Zinsen: 800 €

a) Muss das Unternehmen die Zahlungen an die XYZ-Bank länger als zehn Jahre, d.h. über den 31.12.2021 hinaus leisten? Beantworten Sie diese Frage, indem Sie den Barwert der Zahlungen der ersten zehn Jahre berechnen und diesen mit der Kreditsumme vergleichen.

b) Wie viele Jahre muss das Unternehmen alle zwölf Monatszahlungen in voller Höhe leisten?

c) Wie hoch ist die Restschuld am Ende des Jahres, in dem das Unternehmen letztmalig alle zwölf Monatszahlungen in voller Höhe zu leisten hat?

d) Das Unternehmen möchte die Restschuld, die sich in Teilaufgabe c) ergibt, mit einer vorgezogenen - aber dafür niedrigeren - Zahlung am 31.12.2013 begleichen. Wie hoch muss diese Zahlung sein?

e) Das Unternehmen leistet am 31.12.2013 eine Sonderzahlung in Höhe von 18 000 € an die XYZ-Bank. Bearbeiten Sie Teilaufgabe a) unter Berücksichtigung dieser Sonderzahlung.

Aufgabe 5
Auf einem Konto mit 2,1% nominellem Jahreszins befinden sich folgende Zahlungsvorgänge:

- Einzahlung von 10 000 € am 31.12.2014
- Abhebung von 8 000 € am 31.05.2016

- Einzahlung von 2 000 € am 31.10.2017

a) Wie hoch ist der Kontostand am 31.10.2017 bei

   1. relativ gemischter Verzinsung? (Bewertungsstichtag 31.10.2017)
   2. monatlicher Verzinsung zum relativen Zins?
   3. konformer Verzinsung?

b) Am Ende eines welchen Monats nach der letzten Einzahlung liegt der Kontostand erstmals über 4 397,90 € bei

   1. monatlicher Verzinsung zum relativen Zins?
   2. konformer Verzinsung?

Lösung zu Aufgabe 1

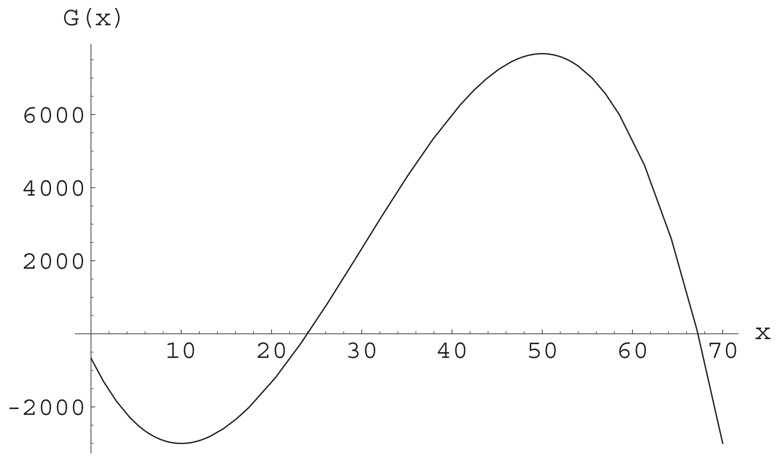
a)

x	p
0	1 200
120	0

d.h. der gesuchte Definitionsbereich ist das Intervall [0;120].

b) $U(x) = x \cdot p(x) = 1\,200x - 10x^2 \ \ ; x \in [0; 120]$
$G(x) = U(x) - K(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 30x^2 - 500x - 666\frac{2}{3} \ \ ; x \in [0; 120]$

c) Notwendige Bedingung:
$0 = G'(x) = -x^2 + 60x - 500 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 60x + 500 \Leftrightarrow x = 50$ oder $x = 10$
Hinreichende Bedingung:
$G''(x) = -2x + 60$
$G''(10) = 40$; d.h. $x = 10$ lok. Minimalstelle
$G''(50) = -40$; d.h. $x = 50$ lok. Maximalstelle



Aus der Grafik ist ersichtlich, dass die Stelle $x = 50$ sogar eine globale Maximalstelle ist.

$G(50) = 7\,666{,}67$

d.h. der maximal Gewinn beträgt $7\,666{,}67$ GE.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	$\boxed{5}$	6	7	12	
2	7	8	4	5	
3	9	10	1	-2	
4	5	6	7	12	1
5	0	$\boxed{-2}$	-29	-59	$5 \cdot$ 2 $- 7 \cdot$ 1
6	0	-4	-58	-118	$5 \cdot$ 3 $- 9 \cdot$ 1
7	5	6	7	12	4
8	0	-2	-29	-59	5
9	0	0	0	0	6 $- 2 \cdot$ 5

Aus Zeile 8 ergibt sich: $-2x_2 - 29x_3 = -59 \iff x_2 = \frac{59}{2} - \frac{29}{2}x_3$.

Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $5x_1 + 6\left(\frac{59}{2} - \frac{29}{2}x_3\right) + 7x_3 = 12 \iff x_1 = -33 + 16x_3$.

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -33 + 16x_3 \\ \frac{59}{2} - \frac{29}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $R_1 \to E_1 : 4 \cdot 1 + 2 \cdot 6 = 16$
$R_1 \to E_2 : 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 10$
$R_2 \to E_1 : 1 \cdot 1 + 5 \cdot 6 = 31$
$R_2 \to E_2 : 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 16$

	E_1	E_2
R_1	16	10
R_2	31	16

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Um die stationären Punkte der Lagrangefunktion zu bestimmen, sind zunächst die partiellen Ableitungen zu ermitteln und für die notwendige Bedingung gleich Null zu setzen:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & L_x(x,y,\lambda) = & 8 + 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{8}{2x} = -\dfrac{4}{x} \\ \text{II} & L_y(x,y,\lambda) = & 24 + 4\lambda y = 0 \\ \text{III} & L_\lambda(x,y,\lambda) = & x^2 + 2y^2 - 22 = 0 \\ \hline 2y \cdot \text{I} - x \cdot \text{II} & & 16y - 24x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x \end{array}$$

Einsetzen in III ergibt:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{9}{4}x^2 - 22 = 0 \Leftrightarrow \frac{11}{2}x^2 = 22 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $x = 2 \Rightarrow y = \dfrac{3}{2} \cdot 2 = 3$ und $\lambda = \dfrac{-4}{2} = -2$

2. Fall: $x = -2 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \cdot (-2) = -3$ und $\lambda = \frac{-4}{-2} = 2$

Als Kandidaten für ein Minimum liegen somit $(2, 3, -2)$ und $(-2, -3, 2)$ vor.

Die zweiten partiellen Ableitungen sind:
$L_{xx}(x, y, \lambda) = 2\lambda$
$L_{yy}(x, y, \lambda) = 4\lambda$
$L_{xy}(x, y, \lambda) = 0$

Und somit gilt für $\lambda_0 = \pm 2$:
$D(x, y, \lambda_0) = L_{xx}(x, y, \lambda_0) \cdot L_{yy}(x, y, \lambda_0) - (L_{xy}(x, y, \lambda_0))^2 = 8\lambda_0^2 = 8 \cdot 4 = 32 >_{\text{immer}} 0$

Somit ist nur noch mittels der zweiten partiellen Ableitung L_{xx} für $(2, 3, -2)$ und $(-2, -3, 2)$ zu prüfen, ob ein Minimum oder Maximum vorliegt.

Da $L_{xx}(x, y, 2) = 2 \cdot 2 = 4 >_{\text{immer}} 0$ gilt, liegt in $(-2, -3)$ eine globale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

(Völlig analog liegt wegen $L_{xx}(x, y, -2) = 2 \cdot (-2) = -4 <_{\text{immer}} 0$ in $(2, 3)$ eine globale Maximalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.)

b) Es sei h die Höhe der Kölschstange und r ihr Radius. Für das Volumen der Kölschstange gilt dann: $V(r, h) = \pi r^2 \cdot h = 240$, da das Glas bis zur Oberkante 240 cm^3 fassen soll. Die Glasoberfläche berechnet sich aus dem Boden des Glases und der Wand, also als Summe einer Kreisfläche und eines Rechtecks mit den Seitenlängen h (Höhe des Glases) und $2\pi r$ (Umfang des Glasbodens):
$$f(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h \ \ ; r, h > 0$$
Die Glasoberfläche ist nun zu minimieren, da der Materialverbrauch minimal sein soll. Zugleich ist aber das Volumen der Kölschstange mit 240 cm^3 festgelegt. Somit ergibt sich die folgende Lagrangefunktion:
$$L(r, h, \lambda) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h + \lambda(\pi r^2 \cdot h - 240)$$

Lösung zu Aufgabe 4

a) $r_J = 800 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}0288) = 9\,726{,}72$
$R_0 = 9\,726{,}72 \cdot \frac{1{,}0288^{10} - 1}{0{,}0288} \cdot \frac{1}{1{,}0288^{10}} = 83\,481{,}34 < 100\,000$
d.h. die Rückzahlung läuft über mehr als zehn Jahre.

b) $n = -\frac{\ln \left[1 - \frac{100\,000}{9\,726{,}72} \cdot 0{,}0288\right]}{\ln 1{,}0288} = 12{,}36594$
d.h. zwölf Jahre lang sind volle Monatszahlungen zu leisetn.

c) $K_{12} = 100\,000 \cdot 1{,}0288^{12} - 9\,726{,}72 \cdot \frac{1{,}0288^{12} - 1}{0{,}0288} = 3\,490{,}929$
d.h. die Restschuld beträgt 3 490,93 €.

d) $\frac{3\,490{,}93}{1{,}0288^{10}} = 2\,628{,}038$
d.h. die Vorauszahlung beträgt 2 628,04 €.

e) Barwert der Zahlungen am 01.01.2012:
$83\,481{,}34 + \dfrac{18\,000}{1{,}0288^2} = 100\,487{,}67 > 100\,000$
d.h. das Unternehmen muss keine Rückzahlungen über den 31.12.2021 hinaus leisten.

Lösung zu Aufgabe 5

a) 1. $K_n = 10\,000 \cdot 1{,}021^2 \cdot \left(1 + \dfrac{10}{12} \cdot 0{,}021\right) - 8\,000 \cdot 1{,}021 \cdot \left(1 + \dfrac{5}{12} \cdot 0{,}021\right) + 2\,000 = 4\,367{,}37$
d.h. der Kontostand beträgt 4 367,37 €.

2. $K_n = 10\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}021}{12}\right)^{34} - 8\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}021}{12}\right)^{17} + 2\,000 = 4\,371{,}14$
d.h. der Kontostand beträgt 4 371,14 €.

3. $K_n = 10\,000 \cdot 1{,}021^{34/12} - 8\,000 \cdot 1{,}021^{17/12} + 2\,000 = 4\,367{,}48$
d.h. der Kontostand beträgt 4 367,48 €.

b) 1. *1. Lösungsweg:*

$$4\,371{,}14 \cdot \left(1 + \frac{0{,}021}{12}\right)^x = 4\,397{,}90 \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{4\,397{,}90}{4\,371{,}14}\right)}{\ln\left(1 + \frac{0{,}021}{12}\right)} = 3{,}491 \text{ Monate}$$

d.h. nach vier Monaten; d.h. am 28.02.2018 liegt der Kontostand erstmals über dem genannten Betrag.

2. Lösungsweg:

$$j = \left(1 + \frac{0{,}021}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}02120331$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{4\,397{,}90}{4\,371{,}14}\right)}{\ln 1{,}02120331} = 0{,}3308115 \text{ Jahre } = 0{,}3308115 \cdot 12 = 3{,}491 \text{ Monate}$$

d.h. nach vier Monaten; d.h. am 28.02.2018 liegt der Kontostand erstmals über dem genannten Betrag.

2. $4\,367{,}48 \cdot 1{,}021^x = 4\,397{,}90 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\left(\frac{4\,397{,}90}{4\,367{,}48}\right)}{\ln 1{,}021} = 0{,}3339809$ Jahre
$0{,}3339809 \cdot 12 = 4{,}00777$ Monate
d.h. nach fünf Monaten; d.h. am 31.03.2018 liegt der Kontostand erstmals über dem genannten Betrag.