Wirtschaftsmathematik-Klausur vom 03.07.2014 und Finanzmathematik-Klausur vom 11.07.2014 und

Bearbeitungszeit: W-Mathe 60 Minuten, F-Mathe 45 Minuten

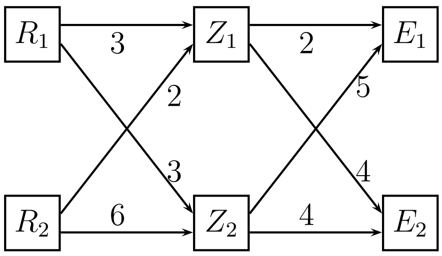
Aufgabe 1

a) Gegeben ist das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 80 \\ \text{II} & 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 130 \\ \text{III} & 4x_1 + x_2 - x_3 = 20 \end{array}$$

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.
2. Bestimmen Sie alle nicht negativen Lösungen.
3. Geben Sie eine spezielle Lösung an, die ganzzahlig und nicht negativ ist.

b) Geben Sie für den zweistufigen Produktionsprozess mit der folgenden Materialflussgrafik die Gesamtbedarfsmatrix an, d.h. die Matrix, deren Einträge angeben, wie viele Mengeneinheiten von R_1 und R_2 zur Produktion einer Mengeneinheit von E_1 und E_2 insgesamt benötigt werden.



Aufgabe 2

Bei der Produktion eines Gutes betragen die variablen Kosten 30 €. Zusätzlich fallen Fixkosten in Höhe von 10 000 € an. Die Preis-Absatz Funktion zu diesem Gut sei:

$$p(x) = 750 - 0{,}3x$$

Dabei sind x die produzierte und abgesetzte Menge und p der Preis des Gutes.

a) Geben Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich (= Menge aller möglichen Funktionswerte) für die Preis-Absatz-Funktion an.

b) Stellen Sie die Kosten-, Umsatz- (Erlös-) und Gewinnfunktion auf.

c) Für welche produzierte und abgesetzte Menge ist der Gewinn maximal?

d) Wie verändert sich – ausgehend von $x = 500$ ME - der Gewinn relativ, wenn die produzierte und abgesetzte Menge um ein Prozent steigt?
Beantworten Sie diese Frage zum einen mithilfe der Elastizität und zum anderen durch den Vergleich der beiden Gewinne. Wieso stimmen die beiden Ergebnisse nicht überein?

e) Wie ändert sich das Ergebnis aus Teil c), wenn die Fixkosten um 50 Prozent steigen? (Begründen Sie kurz Ihre Antwort.)

Aufgabe 3
Ein Unternehmen produziert und vertreibt zwei Güter A und B. Es arbeitet mit der Gewinnfunktion:

$$G(x, y) = -2x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 28y - 400 \ \ ; x, y, \geq 0$$

Dabei seien x die produzierten und abgesetzten Mengeneinheiten von Gut A und y die produzierten und abgesetzten Mengeneinheiten von Gut B.

a) Berechnen Sie das gewinnmaximale Produktionsprogramm.

b) Das Unternehmen möchte von Gut A und Gut B zusammen a Mengeneinheiten produzieren und absetzen. Dabei sei a eine reelle Zahl größer 3. Berechnen Sie das gewinnmaximale Produktionsprogramm in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 4
Eine Firma kalkuliert bei einem Jahreszins von 4,2% verschiedene Finanzierungsmodelle zur Anschaffung eines neuen Kopierers für 20 000 €.

a) Wie hoch wären fünf gleich hohe jährliche Zahlungen, erste Rate ist fällig beim Erwerb des Kopierers?

b) Wie hoch wären vorschüssige Monatszahlungen über fünf Jahre, erste Zahlung ist fällig beim Erwerb des Kopierers?

c) Angenommen es würden sechs Jahre lang jeweils zu Beginn eines Quartals 800 € zurückgezahlt, erste Zahlung wäre fällig beim Erwerb des Kopierers. Im siebten und achten Jahr würden Zahlungen ausgesetzt. Wie hoch wäre dann die Restschuld am Ende des achten Jahres?

Aufgabe 5
Frau Müller hat aufgrund einer Bonuszahlung ihres Arbeitgebers am 19.12.2014 einen Betrag von 10 000 € zur Verfügung. Sie überlegt, was sie mit dem Geld machen soll. Ihre Bank bietet ihr eine Spareinlage mit einem Jahreszins von 1,7% an.

a) Welchen Betrag hätte Frau Müller bei diesen Konditionen am 14.03.2017 zur Verfügung, wenn man von der relativ gemischten Verzinsung ausgeht?

b) Frau Müller legt das Geld zu den oben genannten Konditionen bei relativ gemischter Verzinsung an. Kann sie damit zwei Großausgaben, eine am 06.04.2016 in Höhe von 5 000 € und eine am 14.03.2017 in Höhe von 5 350 €, vollständig finanzieren? Bewertungsstichtag 19.12.2014.

c) Frau Müller macht eine Modellrechnung. Angenommen sie bekommt für die ersten beiden Jahre, d.h. vom 19.12.2014 bis zum 19.12.2016, einen Jahreszins von 1,75%. Welchen Jahreszins müsste sie ab 19.12.2016 vereinbaren, wenn sie am 14.03.2017 einen Betrag von 10 400 € angespart haben möchte und die Verzinsung dem Prinzip der relativ gemischten Verzinsung folgt?

d) Bearbeiten Sie die Aufgabenteile a) und b) für den Fall, dass die relativ gemischte Verzinsung durch die konforme Verzinsung ersetzt wird.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	$\boxed{2}$	1	3	80	
2	5	2	4	130	
3	4	1	-1	20	
4	2	1	3	80	1
5	0	$\boxed{-1}$	-7	-140	$2 \cdot$ 2 $- 5 \cdot$ 1
6	0	-1	-7	-140	3 $- 2 \cdot$ 1
7	2	1	3	80	4
8	0	-1	-7	-140	5
9	0	0	0	0	6 $-$ 5

1. Aus Zeile 8 ergibt sich: $-x_2 - 7x_3 = -140 \iff x_2 = 140 - 7x_3$.
   Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $2x_1 + (140 - 7x_3) + 3x_3 = 80 \iff x_1 = -30 + 2x_3$.
   $$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} -30 + 2x_3 \\ 140 - 7x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R}\}$$
2. $x_1 = -30 + 2x_3 \geq 0 \iff 2x_3 \geq 30 \iff x_3 \geq 15$
   $x_2 = 140 - 7x_3 \geq 0 \iff 140 \geq 7x_3 \iff 20 \geq x_3 \iff x_3 \leq 20$
   $x_3 \geq 0$
   $$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} -30 + 2x_3 \\ 140 - 7x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in [15; 20]\}$$
3. Sei $x_3 = 17 \Rightarrow x_1 = 140 - 7 \cdot 17 = 21$ und $x_2 = -30 + 2 \cdot 17 = 4$.

b) $R_1 \to E_1 : 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 21$
$R_1 \to E_2 : 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 24$
$R_2 \to E_1 : 2 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 34$
$R_2 \to E_2 : 6 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 32$

	E_1	E_2
R_1	21	24
R_2	34	32

Lösung zu Aufgabe 2

a)

x	p
0	750
$\frac{750}{0{,}3} = 2\,500$	0

d.h. Definitionsbereich = [0;2 500] und Wertebereich = [0;750].

b) $k_v(x) = 30$ und $K_f(x) = 10\,000 \Rightarrow K(x) = 30x + 10\,000$
$U(x) = p(x) \cdot x = 750x - 0{,}3x^2$
$G(x) = U(x) - K(x) = 720x - 0{,}3x^2 - 10\,000$

c) Notwendige Bedingung:
$0 = G'(x) = 720 - 0{,}6x \Leftrightarrow x = 1\,200$
Hinreichende Bedingung:
$G''(x) = -0{,}6 <_{\text{immer}} 0$; d.h. $x = 1\,200$ globale Maximalstelle von $G(x)$.

d) Elastizität:
$$\epsilon_G(500) = G'(500) \cdot \frac{500}{G(500)} = 420 \cdot \frac{500}{275\,000} = 0{,}7636$$
d.h. wird die produzierte und abgesetzte Menge von 500 ME um ein Prozent auf 505 ME erhöht, so steigt der Gewinn um etwa 0,8 Prozent.

x	500	505
$G(x)$	275 000	277 092,5

und $\dfrac{277\,092{,}5}{275\,000} = 1{,}007609$

d.h. der Gewinn steigt exakt um 0,7609 Prozent.
Die beiden Prozentzahlen stimmen nicht überein, weil die Elastizität bei nicht linearen Funktionen nur einen Näherungswert angibt.

e) Die Ableitung der Fixkosten beträgt null. Da das Betriebsmaximum über die Nullstelle der ersten Ableitung bestimmt wird, ist die Höhe der Fixkosten für die Bestimmung der Stelle irrelevant. Deshalb liegt das Betriebsmaximum unverändert an der Stelle $x = 1\,200$.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $G_x(x,y) = -4x - 4y + 16 \quad G_{xx}(x,y) = -4$
$G_y(x,y) = -4x - 8y + 28 \quad G_{yy}(x,y) = -8$
$G_{xy}(x,y) = -4$

Notwendige Bedingung:

I	0	=	$-4x - 4y + 16$
II	0	=	$-4x - 8y + 28$
I − II	0	=	$4y - 12 \Leftrightarrow y = 3$
I	0	=	$-4x - 12 + 16 = -4x + 4 \Leftrightarrow x = 1$

d.h. (1;3) stationärer Punkt
Hinreichende Bedingung:
$D(x;y) = (-4) \cdot (-8) - (-4)^2 = 32 - 16 = 16 >_{\text{immer}} 0$
$G_{xx}(x;y) = -4 <_{\text{immer}} 0$; d.h. (1;3) glob. Maximalstelle
d.h. die Gewinn-maximalen Mengen betragen $x = 1$ ME und $y = 3$ ME.

b) $G(x,y) \overset{!}{=}$ max. unter NB:$x + y = a > 3$
1. Lösungsweg: Einsetz-Methode mit $x = a - y$
$G(y) = -2(a-y)^2 - 4(a-y)y - 4y^2 + 16(a-y) + 28y - 400$
$G(y) = -2a^2 + 4ay - 2y^2 - 4ay + 4y^2 - 4y^2 + 16a - 16y + 28y - 400$
$G(y) = -2y^2 + 12y - 2a^2 + 16a - 400$
$G'(y) = -4y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = 3 \Rightarrow x = a - 3$

$G''(y) = -4$ d.h. $G(x,y)$ hat in $(a-3;3)$ eine globale Maximalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

2. Lösungsweg: Einsetz-Methode mit $y = a - x$

$G(x) = -2x^2 - 4x(a-x) - 4(a-x)^2 + 16x + 28(a-x) - 400$

$G(x) = -2x^2 - 4ax + 4x^2 - 4a^2 + 8ax - 4x^2 + 16x + 28a - 28x - 400$

$G(x) = -2x^2 + (4a-12)x - 4a^2 + 28a - 400$

$G'(x) = -4x + 4a - 12 = 0 \Leftrightarrow x = a - 3 \Rightarrow y = a - (a-3) = 3$

$G''(x) = -4$ d.h. $G(x,y)$ hat in $(a-3;3)$ eine globale Maximalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

3. Lösungsweg: Lagrange-Methode

$L(x,y,\lambda) = -2x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 28y - 400 + \lambda(x+y-a)$

$$\begin{array}{lcllcl}
L_x(x,y,\lambda) & = & -4x - 4y + 16 + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & -4 \\
L_y(x,y,\lambda) & = & -4x - 8y + 28 + \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & -8 \\
L_\lambda(x,y,\lambda) & = & x + y - a & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & -4
\end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 0 & = & -4x - 4y + 16 + \lambda \\
\text{II} & 0 & = & -4x - 8y + 28 + \lambda \\
\text{III} & 0 & = & x + y - a \\
\hline
\text{I} - \text{II} & 0 & = & 4y - 12 \Leftrightarrow y = 3 \Rightarrow x = a - 3
\end{array}$$

Der Wert von λ_0 wird nicht benötigt.

Hinreichende Bedingung:

$D(x;y;\lambda_0) = (-4)\cdot(-8) - (-4)^2 = 16 > 0$

$L_{xx}(x;y;\lambda_0) = -4 < 0$

d.h. $G(x,y)$ hat in $(a-3\,;\,3)$ eine globale Maximalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $20\,000 = r'_j \cdot 1{,}042 \cdot \dfrac{1{,}042^5 - 1}{0{,}042} \cdot \dfrac{1}{1{,}042^5} = r'_J \cdot 4{,}612851 \Leftrightarrow r'_J = 4\,335{,}714$

d.h. die Zahlungen würden 4 335,71 € betragen

b) $r_J = 4\,335{,}714 \cdot 1{,}042 = 4\,517{,}814$

$4\,517{,}814 = r'_M \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}042) = r'_M \cdot 12{,}273 \Leftrightarrow r'_M = 368{,}11$

d.h. die monatlichen Zahlungen würden 368,11 € betragen.

c) $r_J = 800(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}042) = 3\,284$

$K_6 = 20\,000 \cdot 1{,}042^6 - 3\,284 \cdot \dfrac{1{,}042^6 - 1}{0{,}042} = 3\,707{,}294$

$3\,707{,}294 \cdot 1{,}042^2 = 4\,025{,}246$

d.h. die Restzahlung würde 4 025,25 € betragen.

Lösung zu Aufgabe 5

a) 19.12.2014 bis 14.03.2017 = 2 Jahre, 2 Monate und 25 Tage = 2,2361 Jahre

$K_{2,2361} = 10\,000 \cdot 1{,}017^2 \cdot (1 + 0{,}2361 \cdot 0{,}017) = 10\,383{,}40$

d.h. Frau Müller hätte 10 384,40 € angespart.

b) 19.12.2014 bis 06.04.2016= 1 Jahr, 3 Monate und 17 Tage = 1,2972 Jahre
Summe der Barwerte beider Beträge:
$$\frac{5\,000}{1{,}017 \cdot (1 + 0{,}2972 \cdot 0{,}017)} + \frac{5\,350}{1{,}017^2 \cdot (1 + 0{,}2361 \cdot 0{,}017)}$$
$= 4\,891{,}71 + 5\,151{,}96 = 10\,043{,}67$
D.h. die beiden Großausgaben können damit nicht vollständig finanziert werden.

c) $10\,400 = 10\,000 \cdot 1{,}0175^2 \cdot (1 + 0{,}2361 \cdot i)$
$$\Rightarrow \frac{10\,400}{10\,000 \cdot 1{,}0175^2} = 1 + 0{,}2361 \cdot i$$
$$\Rightarrow \frac{10\,400}{10\,000 \cdot 1{,}0175^2} - 1 = 0{,}004534 = 0{,}2361 \cdot i \Rightarrow i = 0{,}01920$$
d.h. der Jahreszins beträgt 1,92%.

d) Zu a) $K_{2,2361} = 10\,000 \cdot 1{,}017^{2,2361} = 10\,384{,}14$
d.h. Frau Müller hätte 10 384,14 € angespart.
Zu b) $\frac{5\,000}{1{,}017^{1,2972}} + \frac{5\,350}{1{,}017^{2,2361}} = 4\,891{,}85 + 5\,152{,}09 = 10\,043{,}94$
d.h. die beiden Großausgaben können damit nicht vollständig finanziert werden.