# F-Mathe-Klausur am 19.07.2017

**Aufgabe 1**

Jemand zahlt bei 4% Zinsen p.a. im Zeitraum vom 01.01.2010 bis 31.12.2015 jeweils zu Beginn eines Monats 200 € und im Zeitraum vom 01.01.2016 bis 31.12.2018 jeweils zu Beginn eines Quartals 750 € auf ein Konto ein.

a) Wie hoch ist der Kontostand am 31.12.2015?

b) Wie hoch ist das Guthaben am 31.12.2018?

c) Wie oft kann er anschließend eine regelmäßige jährliche vorschüssige Rente über 2 000 € beziehen, deren erster Betrag fällig ist am 01.01.2021?

**Aufgabe 2**

Ein Unternehmen hat gegenüber einem Kunden die folgenden drei Forderungen:

| Fälligkeitstermin | Betrag |
|---|---|
| 31.03.2016 | 35 000 GE |
| 30.09.2017 | 50 000 GE |
| 31.12.2019 | 25 000 GE |

a) Die Wirtschaftsprüfung schlägt vor, die drei Forderungen mit dem Barwert in der Bilanz auszuweisen. Mit welchem Betrag geht dann die Summe der drei Forderungen in die Bilanz zum 31.12.2014 ein? Verwenden Sie bei Ihren Berechnungen die relative gemischte Verzinsung und gehen Sie von einem nominellen Jahreszins von 3,5% aus.

b) Am 30.06.2014 wird eine Änderung der Zahlungsmodalitäten vereinbart. Dem Schuldner soll mehr Zeit zur Rückzahlung gegeben werden. Die Rückzahlung erfolgt nun in zwei Beträgen zum 31.12.2018 und zum 31.12.2020. Dabei soll die zweite Zahlung dreimal so hoch sein wie die erste Zahlung. Bestimmen Sie beide Beträge, wenn der Bewertungsstichtag der 30.06.2014 ist. Verwenden Sie bei Ihren Berechnungen die relative gemischte Verzinsung und gehen Sie von einem nominellen Jahreszins von 3,5% aus.

*Lösung zu Aufgabe 1:*

a) $r_J = 200(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) = 2\,452$

$$R_6 = 2\,452 \cdot \frac{1{,}04^6 - 1}{0{,}04} = 16\,264{,}06$$

d.h. der Kontostand am 31.12.2015 beträgt 16 264,06 €.

b) $16\,264{,}06 \cdot 1{,}04^3 = 18\,294{,}85$

$r_J = 750(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}04) = 3\,075$

$$R_3 = 3075 \cdot \frac{1{,}04^3 - 1}{0{,}04} = 9598{,}92$$

$K_9 = 18\,294{,}85 + 9598{,}92 = 27\,893{,}77$

d.h. das Guthaben am 31.12.2018 beträgt 27 893,77 €.

c) $27\,893{,}77 \cdot 1{,}04^2 = 30\,169{,}90$

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{30\,169{,}90}{1{,}04 \cdot 2\,000} \cdot 0{,}04\right]}{\ln 1{,}04} = 22{,}13$$

d.h. 22 Jahre lang können die vollen Beträge ausgezahlt werden.

*Lösung zu Aufgabe 2*

a) Wert der Forderungen am 31.12.2014

$$\begin{aligned} & \frac{35\,000}{1{,}035 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}035\right)} + \frac{50\,000}{1{,}035^2 \cdot \left(1 + \frac{9}{12} \cdot 0{,}035\right)} + \frac{25\,000}{1{,}035^5} \\ = \; & 33\,523{,}10 + 45\,481{,}64 + 21\,049{,}33 \\ = \; & 100\,054{,}07 \end{aligned}$$

d.h. in die Bilanz zum 31.12.2014 gehen die Forderungen mit einem Betrag von 100 054,07 GE ein.

b) Wert der Forderungen am 30.06.2014

$$\begin{aligned} & \frac{35\,000}{1{,}035 \cdot \left(1 + \frac{9}{12} \cdot 0{,}035\right)} + \frac{50\,000}{1{,}035^3 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}035\right)} + \frac{25\,000}{1{,}035^5 \cdot \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}035\right)} \\ = \; & 32\,951{,}45 + 44\,705{,}96 + 20\,687{,}30 \\ = \; & 98\,344{,}71 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 98\,344{,}71 &= \frac{x}{1{,}035^4 \cdot \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}035\right)} + \frac{3x}{1{,}035^6 \cdot \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}035\right)} \\ 98\,344{,}71 &= 0{,}8565 \cdot x + 0{,}7995 \cdot 3x \\ 98\,344{,}71 &= 0{,}8565 \cdot x + 2{,}3985 \cdot x \\ 98\,344{,}71 &= 3{,}254982 \cdot x \\ x &= 30\,213{,}5957 \text{ bzw. } 3x = 90\,640{,}7870 \end{aligned}$$

d.h. die erste Forderung beträgt 30 213,60 GE und die zweite Forderung beträgt 90 640,80 GE.

# QM I Klausur am 20.07.2017

**Aufgabe 1**

a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion
$$f(x) = x^3 + 7x^2 - \ln(x);\; x > 0.$$

b) Gegeben sei die Preis-Absatz Funktion:
$$x(p) = \frac{75}{7+p} \quad ; p \geq 0$$
Bestimmen Sie die Elastizität von $x(p)$ im Punkt $p = 8$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x;\; x \in \mathbb{R}$ für $x \neq 0$ der Gleichung
$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{2+x}{x} \text{ genügt.}$$

**Aufgabe 2**

Jede der drei Kostenstellen $K_1, K_2, K_3$ des Unternehmens $A$ erbringt Leistungen (gemessen in LE) für die jeweils anderen Kostenstellen und für Kunden außerhalb des Unternehmens gemäß folgender Tabelle:

| | an $K_1$ | an $K_2$ | an $K_3$ | an Kunden |
|---|---|---|---|---|
| $K_1$ | 0 | 25 | 15 | 70 |
| $K_2$ | 20 | 0 | 10 | 90 |
| $K_3$ | 40 | 30 | 0 | 110 |

Die Primärkosten betragen 300 GE in $K_1$, 200 GE in $K_2$ und 270 GE in $K_3$.

a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem zur Berechnung der innerbetrieblichen Verrechnungspreise auf.

b) Bestimmen Sie die innerbetrieblichen Verrechnungspreise mithilfe des Gauß-Algorithmus.

**Aufgabe 3**

a) Bestimmen Sie die Sattelstellen von
$$f(x, y) = 4xy + 6x + 2y \;\; ; (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

b) Bestimmen Sie die globale Minimalstelle der Funktion
$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + xy + x + y - 17 \;\; ; (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
unter der Nebenbedingung $x + y = 8$.

*Lösung zu Aufgabe 1*

a) $f'(x) = 3x^2 + 14x - \dfrac{1}{x}$ und $f''(x) = 6x + 14 + \dfrac{1}{x^2}$

b) $x(8) = \dfrac{75}{7+8} = \dfrac{75}{15} = 5$

$$x'(p) = \left(\frac{75}{7+p}\right)' = \left(75 \cdot (7+p)^{-1}\right)' = 75 \cdot (-1) \cdot (7+p)^{-2} \cdot 1 = -\frac{75}{(7+p)^2}$$

$x'(8) = -\frac{75}{(7+8)^2} = -\frac{75}{225} = -\frac{1}{3}$

$\varepsilon_x(8) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{8}{5} = -0{,}5\overline{3}$

d.h. steigt der Preis von 8 GE um ein Prozent, so sinkt der Absatz um $0{,}5\overline{3}$ Prozent.

c) *1. Lösungsweg:*

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \left(\frac{2}{x} + 1\right) \cdot x^2 \cdot e^x = \frac{2+x}{x} \cdot x^2 \cdot e^x = \frac{2+x}{x} \cdot f(x)$

*2. Lösungsweg:*

$\frac{2+x}{x} \cdot f(x) = \frac{2+x}{x} \cdot x^2 \cdot e^x = (2+x) \cdot x \cdot e^x = 2xe^x + x^2e^x = f'(x)$

*Lösung zu Aufgabe 2*

a) $v_1$= Bewertung in GE für eine in $K_1$ hergestellte LE
$v_2$= Bewertung in GE für eine in $K_2$ hergestellte LE
$v_3$= Bewertung in GE für eine in $K_3$ hergestellte LE
Kostengleichgewicht:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & (25+15+70)v_1 - 20v_2 - 40v_3 = 300 \\ \text{II} & (20+10+90)v_2 - 25v_1 - 30v_3 = 200 \\ \text{III} & (40+30+110)v_3 - 15v_1 - 10v_2 = 270 \end{array}$$

b) Gaußalgorithmus

| Zeile | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | | Operation |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 110 | −20 | −40 | 300 | |
| 2 | −25 | 120 | −30 | 200 | |
| 3 | −15 | −10 | 180 | 270 | |
| 4 | $\boxed{11}$ | −2 | −4 | 30 | 1÷10 |
| 5 | −5 | 24 | −6 | 40 | 2÷5 |
| 6 | −3 | −2 | 36 | 54 | 3÷5 |
| 7 | 11 | −2 | −4 | 30 | 4 |
| 8 | 0 | $\boxed{254}$ | −86 | 590 | 11 · 5+5 · 4 |
| 9 | 0 | −28 | 384 | 684 | 11 · 6+3 · 4 |
| 10 | −11 | −2 | −4 | 30 | 7 |
| 11 | 0 | 254 | −86 | 590 | 8 |
| 12 | 0 | 0 | 95 128 | 190 256 | 254 · 9+28 · 8 |

12 $95\,128 v_3 = 190\,256 \Leftrightarrow v_3 = 2$

11 $254 v_2 - 86 \cdot 2 = 590 \Leftrightarrow v_2 = \frac{590+172}{254} = \frac{762}{254} = 3$

10 $11 v_1 - 2 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 30 \Leftrightarrow v_1 = \frac{30+6+8}{11} = \frac{44}{11} = 4$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \}$

d.h. die innerbetrieblichen Verrechnungspreise betragen in $K_1$ genau 4 GE, in $K_2$ genau 3 GE und in $K_3$ genau 2 GE.

*Lösung zu Aufgabe 3*

a) $f_x(x,y) = 4y + 6 \quad f_{xx}(x,y) = 0$
$f_y(x,y) = 4x + 2 \quad f_{yy}(x,y) = 0$
$f_{xy}(x,y) = 4$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lrcll} \text{I} & 0 & = & 4y+6 & \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2} \\ \text{II} & 0 & = & 4x+2 & \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \end{array}$$

d.h. $(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$ ist ein stationärer Punkt.

Hinreichende Bedingung:

$D(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}) = 0 - 4^2 = -16 < 0$

d.h. $(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$ ist eine Sattelstelle

b) *1. Lösungsweg:* Einsetz-Methode

NB $x + y = 8 \Leftrightarrow x = 8 - y$

$$\begin{array}{lrcl} \text{Setze} & f(y) & = & (8-y)^2 + 2y^2 + (8-y)y + (8-y) + y - 17 \\ & & = & 64 - 16y + y^2 + 2y^2 + 8y - y^2 + 8 - y + y - 17 \\ & & = & 2y^2 - 8y + 55 \end{array}$$

$f'(y) = 4y - 8$
$f''(y) = 4$

Notwendige Bedingung:

$0 = 4y - 8 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 8 - 2 = 6$

Hinreichende Bedingung:

$f''(y) = 4 >_{\text{immer}} 0$

d.h. $f(x,y)$ hat in $(6\,;\,2)$ eine globale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

*2. Lösungsweg:* Einsetz-Methode

NB $x + y = 8 \Leftrightarrow y = 8 - x$

$$\begin{array}{lrcl} \text{Setze} & f(x) & = & x^2 + 2(8-x)^2 + x(8-x) + x + (8-x) - 17 \\ & & = & x^2 + 128 - 32x + 2x^2 + 8x - x^2 + x + 8 - x - 17 \\ & & = & 2x^2 - 24x + 119 \end{array}$$

$f'(x) = 4x - 24$
$f''(x) = 4$

Notwendige Bedingung:

$0 = 4x - 24 \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow y = 8 - 6 = 2$

Hinreichende Bedingung:

$f''(x) = 4 >_{\text{immer}} 0$

d.h. $f(x,y)$ hat in $(6\,;\,2)$ eine globale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

*3. Lösungsweg:* Lagrange-Methode:

$L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + xy + x + y - 17 + \lambda(x + y - 8)$

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L_x(x,y,\lambda) &=& 2x+y+1+\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &=& 2 \\
L_y(x,y,\lambda) &=& 4y+x+1+\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &=& 4 \\
L_\lambda(x,y,\lambda) &=& x+y-8 & L_{xy}(x,y,\lambda) &=& 1
\end{array}
$$

Notwendige Bedingung:

$$
\begin{array}{llcll}
\text{I} & 0 &=& 2x+y+1+\lambda & \\
\text{II} & 0 &=& 4y+x+1+\lambda & \\
\text{III} & 0 &=& x+y-8 & \\
\hline
\text{I}-\text{II} & 0 &=& x-3y & \Leftrightarrow x=3y \\
\text{III} & 0 &=& 3y+y-8=4y-8 & \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=8-2=6
\end{array}
$$

Der Wert von $\lambda_0$ wird nicht benötigt.

Hinreichende Bedingung:

$D(x;y;\lambda_0) = 2\cdot 4 - 1^2 = 7 >_{\text{immer}} > 0$

$L_{xx}(x;y;\lambda_0) = 2 >_{\text{immer}} 0$

d.h. $f(x,y)$ hat in $(6\,;\,2)$ eine globale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

# QM II Klausur am 19.07.2017

**Aufgabe 1**

Herr Müller hat ein Vermögen von 100.000 Euro.

a) Das Vermögen wird mit einem Zinssatz von 6% pro Jahr verzinst.

   1. Herr Müller entnimmt am Anfang eines jeden Quartals 500 Euro. Über welchen Betrag verfügt Herr Müller nach 10 Jahren?
   2. Wie viel dürfte Herr Müller bei einer jährlichen Entnahme zum jeweiligen Jahresanfang entnehmen, so dass er in 10 Jahren weiterhin über ein Vermögen von 100.000 Euro verfügt?

c) Wie hoch müsste der Zinssatz bei stetiger Verzinsung sein, damit aus dem Vermögen von 100.000 Euro in 10 Jahren ein Vermögen von 200.000 Euro wird?

b) Herr Müller erwirbt am 01.01.2017 ein Haus zum Preis von 500.000 Euro und nimmt dafür einen Kredit in Höhe von 400.000 Euro auf. Für die Ausgestaltung des Kredits bestehen zwei Möglichkeiten:

| | |
|---|---|
| 1. Möglichkeit: | Der Kredit hat eine Laufzeit von 20 Jahren und soll in gleichbleibenden jährlichen Tilgungsraten getilgt werden. Der Zinssatz beläuft sich auf 3%. |
| 2. Möglichkeit: | Der Kredit hat eine Laufzeit von 15 Jahren. Der Kredit wird mit einer einzigen Zahlung am Ende der Laufzeit getilgt. Der jährliche Zinssatz beläuft sich auf 2%. |

Welche Tilgungsmöglichkeit sollte Herr Müller wählen, wenn er als Entscheidungskriterium den Barwert aller Zinszahlungen heranzieht?

*Lösung zu Aufgabe 1*

a) 1. $r_J = 500(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}06) = 2\,075$

$$K_{10} = 100\,000 \cdot 1{,}06^{10} - 2\,075 \cdot \frac{1{,}06^{10} - 1}{0{,}06} = 151\,734{,}62$$

d.h. er kann über 151 734,62 Euro verfügen.

2. Zinsen am Ende des ersten Jahres $= 100\,000 \cdot 0{,}06 = 6\,000$ Euro.

Ewige vorschüssige Jahresrente $= \dfrac{6\,000}{1{,}06} = 5\,660{,}38$

d.h. er dürfte jeweils zu Beginn eines Jahres 5 660,38 Euro abheben.

b) $200\,000 = 100\,000 \cdot e^{10 \cdot i} \Leftrightarrow 2 = e^{10 \cdot i} \Leftrightarrow \ln 2 = 10 \cdot i \Leftrightarrow i = \dfrac{\ln 2}{10} = 0{,}06931472$

d.h. der Jahreszinssatz müsste 6,931472% betragen.

c) *1. Möglichkeit:*

Tilgungsbetrag der Ratentilgung $= \frac{400\,000}{20} = 20\,000$

Barwert aller Zinszahlungen einer Ratentilgung:

$$Z_0 = 400\,000 - 20\,000 \cdot \frac{1{,}03^{20} - 1}{0{,}03} \cdot \frac{1}{1{,}03^{20}} = 102\,450{,}50$$

*2. Möglichkeit:*

Schulden nach 15 Jahren, wenn nichts zurück gezahlt wird:

$K_{15} = 400\,000 \cdot 1{,}02^{15} = 538\,347{,}3$

Summe der Zinszahlungen am Ende des 15. Jahres:

$538\,347{,}3 - 400\,000 = 138\,347{,}3$

Barwert aller Zinszahlungen:

$\dfrac{138\,347{,}3}{1{,}02^{15}} = 102\,794{,}1$

d.h. der Barwert aller Zinszahlungen ist bei der ersten Möglichkeit geringer und somit ist die erste Möglichkeit günstiger.