QM I (W-Mathe) Klausur am 20.09.2016

Bearbeitungszeit: 45 Min

Aufgabe 1

Die Gesamtkosten (in Tausend Euro) für die Herstellung eines Produkts beruhen in Abhängigkeit von der Menge x in Mengeneinheiten (ME) auf folgender Funktion:

$$K(x) = 4x^3 - 48x^2 + 320x + 1\,292 \quad x \geq 0$$

a) Berechnen Sie die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 4 ME und interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Ermitteln Sie die Funktion der variablen Stückkosten (durchschnittlichen variablen Kosten) und geben Sie den Definitionsbereich an.

c) Bei welcher Produktionsmenge sind die variablen Stückkosten (durchschnittlichen variablen Kosten) minimal (Betriebsminimum)?

d) Ist die folgende Aussage zutreffend?

„Im Betriebsminimum betragen sowohl die variablen Stückkosten als auch die Grenzkosten 176 Tausend Euro.“

Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 90 \\ \text{II} & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & 220 \\ \text{III} & 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 & = & 460 \end{array}$$

b) Das Endtableau eines Gaußalgorithmus sieht wie folgt aus:

Zeile	x_1	x_2	x_3	
1	7	0	71	1 400
2	0	7	−11	−70
3	0	0	0	0

bzw. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 71 & 1\,400 \\ 0 & 7 & -11 & -70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des zugrunde liegenden Gleichungssystems.
2. Bestimmen Sie alle nichtnegtiven Lösungen.
3. Bestimmen Sie alle ganzzahligen nichtnegativen Lösungen.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie das absolute (globale) Minimum der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 4x + 2y - 10; \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

unter der Nebenbedingung $x + y = a$. Dabei sei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl.

Lösung zu Aufgabe 1

a) $K'(x) = 12x^2 - 96x + 320$
$K'(4) = 128$ d.h. werden statt 4 ME jetzt 5 ME hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 128 000 Euro.

b) $k_v(x) = 4x^2 - 48x + 320 \;\; ; x > 0$

c) $0 = k_v'(x) = 8x - 48 \Leftrightarrow x = 6$
$k_v''(x) = 8 >_{\text{immer}} 0$
d.h. $k_v(x)$ hat in $x = 6$ ein globales Minimum.

d) $k_v'(6) = 176$ und $K'(6) = 176$. Deshalb sind Grenzkosten und variable Stückkosten an der Betriebsminimum-Stelle gleich groß.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	$\boxed{1}$	1	2	90	
2	3	2	5	220	
3	5	7	9	460	
4	1	1	2	90	1
5	0	$\boxed{-1}$	-1	-50	2 $-3\cdot$ 1
6	0	2	-1	10	3 $-5\cdot$ 1
7	1	1	2	90	4
8	0	-1	-1	-50	5
9	0	0	-3	-90	6 $+\ 2\cdot$ 5

Zeile 9: $-3x_3 = -90 \iff x_3 = 30.$

Einsetzen in Zeile 8 ergibt: $-x_2 - 30 = -50 \iff x_2 = 20.$

Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $x_1 + 20 + 60 = 90 \iff x_1 = 10.$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich somit wie folgt:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} \}$$

b) 1. Zeile 2: $7x_2 - 11x_3 = -70 \Leftrightarrow 7x_2 = 11x_3 - 70 \leftrightarrow x_2 = \frac{11}{7}x_3 - 10$
Zeile 1: $7x_1 + 71x_3 = 1\,400 \Leftrightarrow 7x_1 = 1\,400 - 71x_3 \Leftrightarrow x_1 = 200 - \frac{71}{7}x_3$

d.h. $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 200 - \frac{71}{7}x_3 \\ \frac{11}{7}x_3 - 10 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$

2. $x_1 = 200 - \dfrac{71}{7}x_3 \geq 0 \Leftrightarrow 200 \geq \dfrac{71}{7}x_3 \Leftrightarrow \dfrac{1\,400}{71} \geq x_3 \Leftrightarrow x_3 \leq 19{,}7$

$x_2 = \dfrac{11}{7}x_3 - 10 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{11}{7}x_3 \geq 10 \Leftrightarrow x_3 \geq \dfrac{70}{11} = 6{,}4$

$x_3 \geq 0$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 200 - \frac{71}{7}x_3 \\ \frac{11}{7}x_3 - 10 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in [6{,}4; 19{,}7] \right\}.$$

3. $$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 200 - \frac{71}{7}x_3 \\ \frac{11}{7}x_3 - 10 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \{7; 14\} \right\}.$$

Lösung zu Aufgabe 3:

1. Lösungsweg: Lagrange-Methode

$L(x, y, \lambda) = x^2 + xy + y^2 + 4x + 2y - 10 + \lambda(x + y - a)$

$$\begin{array}{lcllcl} L_x(x,y,\lambda) & = & 2x + y + 4 + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & 2 \\ L_y(x,y,\lambda) & = & x + 2y + 2 + \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & 2 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & x + y - a & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & 1 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 0 = 2x + y + 4 + \lambda \\ \text{II} & 0 = x + 2y + 2 + \lambda \\ \text{III} & 0 = x + y - a \\ \hline \text{I} - \text{II} & 0 = x - y + 2 \Leftrightarrow y = x + 2 \\ \text{III} & 0 = x + (x + 2) - a = 2x + 2 - a \Leftrightarrow 2x = a - 2 \Leftrightarrow x = 0{,}5a - 1 \\ & y = (0{,}5a - 1) + 2 = -0, = 0{,}5a + 1 \end{array}$$

Der Wert von λ_0 wird nicht benötigt.

Hinreichende Bedingung:

$D(x; y; \lambda_0) = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 >_{\text{immer}} 0$

$L_{xx}(x; y; \lambda_0) = 2 >_{\text{immer}} 0$

d.h. $f(x, y)$ hat in $(0{,}5a - 1\,;\, 0{,}5a + 1)$ eine globale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

2. Lösungsweg: Einsetz-Methode

$x + y = a \Leftrightarrow y = a - x$

$$\begin{array}{ll} f(x) & = x^2 + x(a - x) + (a - x)^2 + 4x + 2(a - x) - 10 \\ & = x^2 + ax - x^2 + a^2 - 2ax + x^2 + 4x + 2a - 2x - 10 \\ & = x^2 + 2x - ax + a^2 + 2a - 10 \\ f'(x) & = 2x + 2 - a \\ f''(x) & = 2 \end{array}$$

Notw. Bed.

$0 = 2x + 2 - a \Leftrightarrow 2x = a - 2 \Leftrightarrow x = 0{,}5a - 1$

$y = a - x = a - (0{,}5a - 1) = 0{,}5a + 1$

Hinr. Bed.

$f''(x) = 2 >_{\text{immer}} 0$

d.h. $f(x, y)$ hat in $(0{,}5a - 1; 0{,}5a + 1)$ ein glob. Min unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.