Wirtschaftsmathematik-Klausur vom 23.09.2015

Bearbeitungszeit: 45 Minuten

Aufgabe 1

a) Ergänzen Sie bitte die fehlenden Werte in der nachfolgenden Tabelle.

Firma	Preis	Output	Umsatz	Gesamtkosten	Fixkosten	Variable Kosten	Stückkosten	variable Stückkosten
1			950		150	500		50
2			9 000	6 300			2,1	1,6
3	10	700		10 500				12
4			5 500	5 500	4 000			0,75
5	4	400			400	800		

b) Gegeben ist die Kostenfunktion

$$K(x) = 2x^3 - 18x^2 + 250x + 100 \quad ; x \geq 0$$

1. Berechnen Sie die Kosten und die Grenzkosten an der Stelle $x = 6$.
2. Interpretieren Sie die Grenzkosten an der Stelle $x = 6$.

Aufgabe 2

a) Gegeben ist das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcl} \text{I} & 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = & 60 \\ \text{II} & x_1 + 4x_2 + 4x_3 & = & 60 \\ \text{III} & x_1 + 2x_2 & = & 20 \end{array}$$

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.
2. Bestimmen Sie alle nichtnegativen Lösungen.
3. Bestimmen Sie alle ganzzahligen nichtnegativen Lösungen.

b) Drei Kostenstellen K_1, K_2, K_3 stellen Leistungen (gemessen in LE) für den Absatzmarkt her. Außerdem beliefern sich die drei Kostenstellen gegenseitig. Die Abgaben betragen:

Abgabe durch	Annahmne durch K_1	K_2	K_3	Absatzmarkt
K_1	0	10	20	50
K_2	30	0	40	80
K_3	20	40	0	100

An Primärkosten (in GE) fallen die folgenden Beträge an:

K_1	K_2	K_3
380	740	920

Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit dem die innerbetrieblichen Verrechnungspreise berechnet werden könnten. (Keine Berechnung des Gleichungssystems!)

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = x^2 \cdot y - 4y + 4x \;\; ; (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

keine streng relativen (lokalen) Extremstellen besitzt.

b) Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die Funktion

$$f(x,y,z) = x^2 - x \cdot y + \tfrac{1}{2}y^2 + x - 4y + \ln(z^2+1) \;\; ; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

einen streng relativen (lokalen) Extremwert annehmen könnte.

Lösung zu Aufgabe 1:

a)

Firma	Preis	Output	Umsatz	Gesamtkosten	Fixkosten	Variable Kosten	Stückkosten	variable Stückkosten
1	95	10	950	650	150	500	65	50
2	3	3 000	9 000	6 300	1 500	4 800	2,1	1,6
3	10	700	7 000	10 500	2 100	8 400	15	12
4	2,75	2 000	5 500	5 500	4 000	1 500	2,75	0,75
5	4	400	1 600	1 200	400	800	3	2

b) $K'(x) = 6x^2 - 36x + 250$

1. $K(6) = 1\,384$ und $K'(6) = 250$
2. Werden statt 6 ME jetzt 7 ME hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 250 GE.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) 1. Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	2	5	2	60	
2	1	4	4	60	
3	$\boxed{1}$	2	0	20	
4	1	2	0	20	3
5	0	2	4	40	2 − · 3
6	0	$\boxed{1}$	2	20	1 −2 · 3
7	1	2	0	20	6
8	0	1	2	20	6
9	0	0	0	0	5 −2 · 6

Zeile 8: $x_2 + 2x_3 = 20 \iff x_2 = 20 - 2x_3$.

Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $x_1 + 2 \cdot (20 - 2x_3) = 20 \iff x_1 = 4x_3 - 20$.

$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 4x_3 - 20 \\ 20 - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R}\}$

2. nichtnegative $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 4x_3 - 20 \\ 20 - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in [5; 10]\}$

3. Für $x_3 = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ gilt: $x_1 \in \mathbb{N}_0$ und $x_2 \in \mathbb{N}_0$.

   nichtnegative ganzzahlige $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 4x_3 - 20 \\ 20 - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}\}$

b) v_1=Bewertung in GE für eine in K_1 hergestellte LE
v_2=Bewertung in GE für eine in K_2 hergestellte LE
v_3=Bewertung in GE für eine in K_3 hergestellte LE

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & (10 + 20 + 50)v_1 - 30v_2 - 20v_3 & = & 380 \\ \text{II} & (30 + 40 + 80)v_2 - 10v_1 - 40v_3 & = & 740 \\ \text{III} & (20 + 40 + 100)v_3 - 20v_1 - 40v_2 & = & 920 \end{array}$$

Lösung zu Aufgabe 3

a) Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & 0 & = & f_x(x, y) = 2xy + 4 \\ \text{II} & 0 & = & f_y(x, y) = x^2 - 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \end{array}$$

1. Fall: $x = -2 \Leftrightarrow -4y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 1$
2. Fall: $x = +2 \Leftrightarrow 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -1$

d.h. $(2; -1)$ und $(-2; 1)$ sind stationäre Punkte.
Hinreichende Bedingung:
$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [(f_{xy}(x, y)]^2 = 2y \cdot 0 - (2x)^2 = -4x^2$
$D(2; -1) = -16 < 0$; d.h. $(2; -1)$ Sattelstelle
$D(-2; 1) = -16 < 0$; d.h. $(-2; 1)$ Sattelstelle

b) Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & 0 & = & f_x(x, y, z) = 2x - y + 1 \\ \text{II} & 0 & = & f_y(x, y, z) = -x + y - 4 \\ \text{III} & 0 & = & \dfrac{2z}{z^2 + 1} \Leftrightarrow 2z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \\ \hline \text{I} + \text{II} & 0 & = & x - 3 \Leftrightarrow x = 3 \\ \text{I} & 0 & = & 6 - y + 1 \Leftrightarrow y = 7 \end{array}$$

d.h. $(3; 7; 0)$ ist ein stationärer Punkt.