QM I-Klausur vom 25.01.2017

Aufgabe 1

a) Gegeben sind die beiden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 7 & c & -4 \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Berechnen Sie:

1. A^t
2. $B - A$
3. $A \cdot B$

b) Gegeben ist folgende Produktionsfunktion:

$$x(r) = e^r + \ln(r+1) - r^2 \quad ; r \geq 1$$

Für welche der beiden Faktoreinsatzmengen $r = 3$ und $r = 4$ ist die Ausbringungsmenge x größer? (Begründung!)

c) Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = (7x - 5y)^3 \quad ; x, y \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x_1 + 4x_3 & = & 24 \\ \text{II} & x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = & 30 \\ \text{III} & 7x_1 + 6x_2 + 6x_3 & = & 71 \end{array}$$

b) Bei der Berechnung eines Produktionsprogramms (e_1, e_2, e_3) mit Hilfe des Gaußalgorithmus ergibt sich das folgende Endtableau:

Zeile	e_1	e_2	e_3	
7	2	3	-1	21
8	0	5	-2	-75
9	0	0	0	0

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.
2. Geben Sie alle nichtnegtiven Lösungen an.
3. Bestimmen Sie die nichtnegativen ganzzahligen Lösungen.

Aufgabe 3

Es sei $a \geq 1$. Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x \cdot y - 3 \cdot a \cdot x \quad ; x, y \in \mathbb{R}$$

unter der Nebenbedingung $e^{x+y} = 1$.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) 1. $A^t = \begin{bmatrix} a & -1 & 7 \\ b & 2 & c \\ 3 & -5 & -4 \end{bmatrix}$

2. $B - A = \begin{bmatrix} 1-a & -b & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ -7 & -c & 5 \end{bmatrix}$

3. $A \cdot B = A$, weil B die Einheitsmatrix ist.

b) $x(3) = 12{,}47183$ und $x(4) = 40{,}20759$
d.h. für $r = 4$ ist die Ausbringungsmenge größer als für $r = 3$.

c) $f_x(x,y) = 21(7x-5y)^2 \quad f_{xx}(x,y) = 294(7x-5y)$
$f_y(x,y) = -15(7x-5y)^2 \quad f_{yy}(x,y) = 150(7x-5y)$
$f_{xy}(x,y) = -210(7x-5y)$

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	2	0	4	24	
2	$\boxed{1}$	4	2	30	
3	7	6	6	71	
4	1	4	2	30	2
5	0	$\boxed{-8}$	0	−36	1 $-2 \cdot$ 2
6	0	−22	−8	−139	3 $-7 \cdot$ 2
7	1	4	2	30	4
8	0	−8	0	−36	5
9	0	0	−32	−160	$4 \cdot$ 6 $-11 \cdot$ 5

Zeile 9: $-32x_3 = -160 \Leftrightarrow x_3 = 5$

Zeile 8: $-8x_2 = -36 \Leftrightarrow x_2 = 4{,}5$

Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $x_1 + 18 + 10 = 30 \Leftrightarrow x_1 = 2.$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich somit wie folgt:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} \}$$

b) 1. Zeile 9: keine Information

Zeile 8: $5e_2 - 2e_3 = -75 \Leftrightarrow e_2 = \frac{2}{5}e_3 - 15$

Zeile 7: $2e_1 + 3e_2 - e_3 = 21 \Leftrightarrow 2e_1 - 45 + \frac{6}{5}e_3 - e_3 = 21 \Leftrightarrow e_1 = 33 - \frac{1}{10}e_3$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich somit wie folgt:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 33 - \frac{1}{10}e_3 \\ \frac{2}{5}e_3 - 15 \\ e_3 \end{pmatrix} ; e_3 \in \mathbb{R} \}$$

2. $e_1 = 33 - \frac{1}{10}e_3 \geq 0 \Leftrightarrow 33 \geq 0{,}1e_3 \Leftrightarrow 330 \geq e_3 \Leftrightarrow e_3 \leq 330$
   $e_2 = \frac{2}{5}e_3 - 15 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}e_3 \geq 15 \Leftrightarrow e_3 \geq 37{,}5$
   $e_3 \geq 0$
   Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich somit wie folgt:
   $$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 33 - \frac{1}{10}e_3 \\ \frac{2}{5}e_3 - 15 \\ e_3 \end{pmatrix} ; e_3 \in [37{,}5; 330]\}$$
3. e_3 muss ein Vielfaches der Zahl 10 sein. Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich somit wie folgt:
   $$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 33 - \frac{1}{10}e_3 \\ \frac{2}{5}e_3 - 15 \\ e_3 \end{pmatrix} ; e_3 \in \{40, 50, 60, 70 \ldots 320, 330\}\}$$

Lösung zu Aufgabe 3:
1. Lösungsweg: Einsetz-Methode:
$e^{x+y} = 1 \Leftrightarrow x + y = \ln 1 = 0 \Leftrightarrow y = -x$
Setze: $f(x) = x^2 + (-x)^2 - x \cdot (-x) - 3ax = 3x^2 - 3ax$
$f'(x) = 6x - 3a$
$f''(x) = 6$
Notwendige Bedingung:
$0 = 6x - 3a \Leftrightarrow x = \frac{3a}{6} = \frac{a}{2}$
$y = -\dfrac{a}{2}$
Hinreichende Bedingung:
$f''(x) = 6 >_{\text{immer}} 0$; d.h. $f(x,y)$ hat in $(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2})$ ein sogar glob. Min. unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

2. Lösungsweg: Lagrange-Methode
$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - xy - 3ax + \lambda(e^{x+y} - 1)$

$$\begin{array}{lcllcl} L_x(x,y,\lambda) & = & 2x - y - 3a + \lambda e^{x+y} & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & 2 + \lambda e^{x+y} \\ L_y(x,y,\lambda) & = & 2y - x + \lambda e^{x+y} & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & 2 + \lambda e^{x+y} \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & e^{x+y} - 1 & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & -1 + \lambda e^{x+y} \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 0 = 2x - y - 3a + \lambda e^{x+y} \\ \text{II} & 0 = 2y - x + \lambda e^{x+y} \\ \text{III} & 0 = e^{x+y} - 1 \Leftrightarrow e^{x+y} = 1 \Leftrightarrow x + y = \ln 1 = 0 \Leftrightarrow y = -x \\ \hline \text{I} - \text{II} & 0 = 3x - 3y - 3a = 3x - 3 \cdot (-x) - 3a = 6x - 3a \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Rightarrow y = -\frac{a}{2} \\ \text{II} & 0 = 2 \cdot (-\frac{a}{2}) - \frac{a}{2} + \lambda e^0 = -\frac{3}{2}a + \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}a \end{array}$$

d.h. $(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{3}{2}a)$ ist ein stationärer Punkt.
Hinreichende Bedingung:
$D(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{3}{2}a) = \left(2 + \frac{3}{2}a\right)^2 - \left(-1 + \frac{3}{2}a\right)^2 = 4 + 6a + 2{,}25a^2 - (1 - 3a + 2{,}25a^2) = 4 + 6a + 2{,}25a^2 - 1 + 3a - 2{,}25a^2 = 3 + 9a > 0$; da $a \geq 1$
$L_{xx}(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{3}{2}a) = 2 + 1{,}5a > 0$; da $a \geq 1$
d.h. $f(x,y)$ hat in $(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{3}{2}a)$ eine lokale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

F-Mathe-Klausur vom 24.01.2017

Aufgabe 1
Ein Auto hat einen Kaufpreis von 14 000 €.

a) Ein Kunde mietet das Auto zu folgenden Konditionen:

- 5 500 € Anzahlung/Sofortzahlung
- vier Jahre lang nachschüssige Monatsraten zu 60 €

1. Wie hoch ist bei einem Jahreszins von 2,5% der Barwert der Zahlungen?
2. Nach vier Jahren möchte der Kunde das vorher gemietete Auto zu seinem Restwert kaufen. Wie hoch muss der Restwert nach vier Jahren bei einem Jahreszins von 2,5% sein, damit der Barwert aller Zahlungen dem ehemaligen Kaufpreis von 14 000 € entspricht?

b) Angenommen das Auto soll binnen sechs Jahren mit vorschüssigen Monatsraten abbezahlt werden. Wie hoch müssen diese Monatsraten bei 2,5 % Jahreszins sein, um dem Kaufpreis von 14 000 € zu entsprechen?

Aufgabe 2
Herr Müller möchte ein Vermögen aufbauen und legt hierzu ein Sparbuch an. Herr Müller möchte im Jahr 2017 zu Beginn eines jeden Quartals 300 Euro auf das Sparbuch einzahlen. Der Zinssatz des Sparbuchs beläuft sich im Jahr 2017 auf 4% p.a. Von 2018 bis einschließlich 2027 möchte Herr Müller am Ende eines jeden Jahres 1200 Euro auf das Sparbuch einzahlen. Der Zinssatz in diesem Zeitraum liegt bei 6% p.a. Von 2028 bis einschließlich 2037 möchte Herr Müller 1200 Euro zu Beginn eines jeden Jahres einzahlen. Der Zinssatz in diesem Zeitraum liegt bei 7% p.a.

a) Bestimmen Sie den Betrag, über den der Herr Müller am 31.12.2037 verfügt.

b) Bestimmen Sie den Betrag, den Herr Müller am 31.12.2016 einzahlen müsste, damit er am 31.12.2037 über das gleiche Vermögen wie in Teilaufgabe a) verfügt. Unterstellen Sie bei Ihrer Rechnung einen jährlich nachschüssigen Zinssatz von 6% p.a.

c) Bestimmen Sie den stetigen Zinssatz, zu dem Herr Müller den Betrag aus Teilaufgabe b) anlegen müsste, damit er am 31.12.2037 über den gleichen Betrag verfügt wie in Teilaufgabe a).

d) Herr Müller kann sein Vermögen ab dem 01.01.2038 zu einem Zinssatz von 4% für unbestimmte Zeit anlegen. Herr Müller möchte ab dem 01.01.2038 zum jeweiligen Jahresende eine Rente aus seinem Vermögen entnehmen. Bestimmen Sie, welchen Betrag Herr Müller maximal entnehmen darf, damit er die Rente unendlich lange entnehmen kann.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $r_J = 60(12 + 5{,}5 \cdot 0{,}025) = 728{,}25$

1. $K_0 = 5\,500 + 728{,}25 \cdot \dfrac{1{,}025^4 - 1}{0{,}025} \cdot \dfrac{1}{1{,}025^4} = 8\,239{,}658$
   d.h. der Barwert beträgt 8 239,66 €.
2. $14\,000 = 8\,239{,}658 + \dfrac{x}{1{,}025^4} \Leftrightarrow 5\,760{,}342 = \dfrac{x}{q^4} \Leftrightarrow x = 6\,358{,}34$
   d.h. der Restwert nach vier Jahren müsste 6 358,34 € betragen.

b) $14\,000 = r_J \cdot \dfrac{1{,}025^6 - 1}{0{,}025} \cdot \dfrac{1}{1{,}025^6} \Leftrightarrow r_J = 14\,000 \cdot 1{,}025^6 \cdot \dfrac{0{,}025}{1{,}025^6 - 1} = 2\,541{,}70$
$2\,541{,}70 = r_u(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}025) \Leftrightarrow r_u = 208{,}9784$
d.h. die Monatsraten müssen 208,98 € betragen.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Vermögen am 31.12.2017:
$K_1 = 300 \cdot \left(4 + \dfrac{5}{2} \cdot 004\right) = 1230$
Vermögen am 31.12.2017:
$K_{11} = 1200 \cdot \dfrac{1{,}06^{10} - 1}{0{,}06} + 1230 \cdot 1{,}06^{10} = 15\,816{,}954 + 2\,202{,}743 = 18\,019{,}697 \approx 18\,019{,}70$
Vermögen am 31.12.2037:
$K_{21} = 1\,200 \cdot 1{,}07 \cdot \dfrac{1{,}07^{10} - 1}{0{,}07} + 18\,019{,}70 \cdot 1{,}07^{10} = 17\,740{,}319 + 35\,447{,}477 = 53\,187{,}796 \approx 53\,187{,}80$

b) $K_0 = \dfrac{53\,187{,}80}{1{,}06^{21}} = 15\,645{,}48$

c)
$$\begin{aligned} 15\,645{,}48 \cdot e^{i\cdot 21} &= 53\,187{,}80 && \mid \div 15\,645{,}48 \\ e^{i\cdot 21} &= 3{,}399563 && \mid \ln \\ i \cdot 21 &= \ln 3{,}399563 && \mid \div 21 \\ i &= \frac{\ln 3{,}399563}{21} \\ i &= 0{,}0582689 \approx 0{,}0583 \end{aligned}$$

d) ewige nachschüssige Jahresrente r_J:
$r_J = 53\,187{,}80 \cdot 0{,}04 = 2\,127{,}512$

QM II-Klausur vom 24.01.2017

Aufgabe 1
Für einen Hauskauf wurde am 01.01.2017 ein Kredit über 150 000 € aufgenommen. Für die Kreditrückzahlung werden vorschüssige Monatsraten über 15 Jahre zu 2,2 % Jahreszinsen vereinbart. Die erste Monatsrate ist fällig am 01.01.2017.

a) Wie hoch sind die vorschüssigen monatlichen Rückzahlungen?

b) Wie hoch sind die Restschuld am 31.12.2026?

c) Am 01.01.2027 erfolgt eine außerplanmäßige Rückzahlung in Höhe von 30 000 €. Anschließend werden weiterhin die unter Teilaufgabe a) berechneten monatlichen Rückzahlungen geleistet.

   1. An welchem Tag erfolgt dann die Zahlung der letzten vollen Monatsrate? (Begründung!)
   2. Wie hoch ist die Restschuld am 31.12.2028?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $150\,000 = r_J \cdot \dfrac{1{,}022^{15} - 1}{0{,}022} \cdot \dfrac{1}{1{,}022^{15}} \Leftrightarrow r_J = 11\,849{,}21$
   $11\,849{,}21 = r'_u(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}022) \Leftrightarrow r'_u = 975{,}8058$
   d.h. die Monatsraten betragen 975,81 €.

b) $K_{10} = 150\,000 \cdot 1{,}022^{10} - 11\,849{,}21 \cdot \dfrac{1{,}022^{10} - 1}{0{,}022} = 55\,528{,}01$
   d.h. die Restschuld beträgt 55 528,01 €.

c) $55\,528{,}01 - 30\,000 = 25\,528{,}01$

   1. $n = -\dfrac{\ln\left(1 - \frac{25\,528{,}01}{11\,849{,}21} \cdot 0{,}022\right)}{\ln 1{,}022} = 2{,}231326$
      $12 \cdot 2{,}231326 = 26{,}77591$
      d.h. es sind noch 26 volle Monatsraten zu zahlen; d.h. die letzte volle Monatsrate ist zu zahlen am 01.02.2029.
   2. Restschuld am 31.12.2028:
      $K_{12} = 25\,528{,}01 \cdot 1{,}022^2 - 11\,849{,}21 \cdot \dfrac{1{,}022^2 - 1}{0{,}022} = 2\,704{,}495$
      d.h die Restschuld am 31.12.2028 beträgt 2 704,50 €.