Wirtschaftsmathematik-Klausur vom 26.09.2013

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1

Jede der drei Kostenstellen K_1, K_2 und K_3 des Unternehmens A erbringt Leistungen (in Leistungseinheiten) für die jeweils anderen Kostenstellen und Kunden außerhalb des Unternehmens gemäß folgender Tabelle:

	an K_1	an K_2	an K_3	an Kunden
von K_1	0	80	20	60
von K_2	40	0	40	120
von K_3	80	20	0	60

Primärkosten fallen bei K_1 in Höhe von 120 GE und bei K_2 und K_3 jeweils in Höhe von 300 GE an.

a) Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der innerbetrieblichen Verrechnungspreise auf.

b) Bestimmen Sie die innerbetrieblichen Verrechnungspreise.

c) Unternehmen B bietet die Leistungen, die K_1 erbringt zu 4 GE, die K_2 erbringt zu 2 GE und die K_3 erbringt zu 3 GE pro Leistungseinheit an. Würden Sie als Entscheider von Unternehmen A unter Berüchsichtigung der Ergebnisse aus Teil b) die Leistungen weiterhin selbst erbringen oder von Unternehmen B kaufen?

Aufgabe 2

Ein Konsument konsumiert nur zwei Güter und zwar x Einheiten des ersten Gutes und y Einheiten des zweiten Gutes. Die Nutzenfunktion des Konsumenten ist

$$u(x, y) = 3\ln(x) + 15\ln(y)\,, \quad \text{mit } x, y > 0.$$

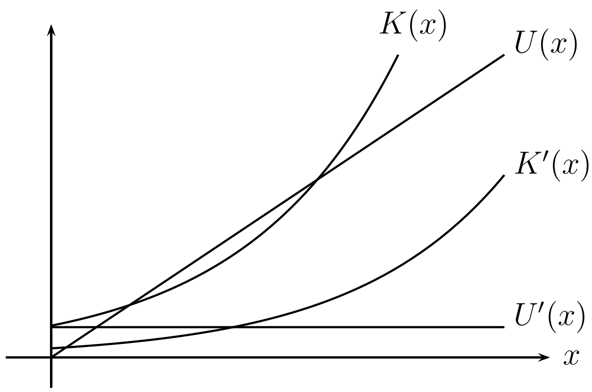
Beide Güter kosten eine GE je Mengeneinheit und der Konsument will genau 120 GE ausgeben. Die Budgetrestriktion ist somit $x + y = 120$.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Methode ein Nutzenmaximum unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion.

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2 + x - 56}{x - 7}$.

b) Ein Unternehmen setzt x Einheiten eines Produkts ab. In folgender Abbildung sind die Grafen der Umsatz-, Kosten-, Grenzerlös- und Grenzkostenfunktionen ($U(x)$, $K(x)$, $U'(x)$ und $K'(x)$) eingezeichnet:



1. Markieren Sie die Gewinnzone.
2. Markieren Sie die Stelle, an der ein Gewinnmaximum vorliegt.

c) Ein Unternehmen produziert aus zwei Inputs x und y ein Gut gemäß der Produktionsfunktion $r(x, y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}};\ \ x, y > 0$. Das Unternehmen muss 10 Einheiten des Gutes produzieren, d.h. es muss im Folgenden immer gelten:

$$x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} = 10$$

1. Lösen Sie die obige Gleichung nach y auf.
2. Wie viele Einheiten des zweiten Inputs y müssen verwendet werden, wenn $x = 10$ ist?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Seien v_1, v_2 und v_3 die Bewertungen (in GE) für die Herstellung je einer Leistungseinheit der drei Kostenstellen. Werden für jede Kostenstelle die empfangenen von den abgegebenen Leistungen abgezogen, so müssen die Primärkosten gerade gedeckt sein:

$$\begin{aligned}
(80 + 20 + 60)v_1 - 40v_2 - 80v_3 &= 120 \\
(40 + 40 + 120)v_2 - 80v_1 - 20v_3 &= 300 \\
(80 + 20 + 60)v_3 - 20v_1 - 40v_2 &= 300
\end{aligned}$$

b) Mit dem Gauß-Algorithmus ergibt sich:

Zeile	v_1	v_2	v_3		Operation
1	$\boxed{160}$	-40	-80	120	
2	-80	200	-20	300	
3	-20	-40	160	300	
4	160	-40	-80	120	1
5	0	$\boxed{360}$	-120	720	$2 \cdot$ 2 + 1
6	0	-360	1200	2520	$8 \cdot$ 3 + 1
7	160	-40	-80	120	4
8	0	360	-120	720	5
9	0	0	1080	3240	6 + 5

Aus Zeile 9 ergibt sich: $1080v_3 = 3240 \iff v_3 = 3$.

Einsetzen in Zeile 8 ergibt: $360v_2 - 120 \cdot 3 = 720 \iff v_2 = 3$.

Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $160v_1 - 40 \cdot 3 - 80 \cdot 3 = 120 \iff v_1 = 3$.

c) Wird nur auf Grund der Kosten entschieden, so würde man die Leistungen von K_1 weiterhin selbst erbringen, die Leistungen von K_2 einkaufen. Bei K_3 wäre es egal. (Natürlich sind für Entscheider neben den Kosten auch andere Faktoren relevant, z.B. die Zuverlässigkeit der Lieferung oder die Qualität der Leistungen.)

Lösung zu Aufgabe 2:

1. Lösungsweg:

Die Lagrange-Funktion ist:

$$L(x, y, \lambda) = 3\ln(x) + 15\ln(y) + \lambda(120 - x - y)\,.$$

Für die notwendige Bedingung werden die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion gleich null gesetzt und nach λ aufgelöst:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & L_x(x,y,\lambda) = \frac{3}{x} - \lambda \stackrel{!}{=} 0 \iff \lambda = \frac{3}{x} \\ \text{II} & L_y(x,y,\lambda) = \frac{15}{y} - \lambda \stackrel{!}{=} 0 \iff \lambda = \frac{15}{y} \\ \text{III} & L_\lambda(x,y,\lambda) = 120 - x - y \stackrel{!}{=} 0 \end{array}$$

Gleichsetzen von I und II ergibt $\dfrac{3}{x} = \dfrac{15}{y} \iff y = 5x$.

Einsetzen in III ergibt

$$120 - x - 5x = 0 \iff 6x = 120 \iff x = 20\,.$$

Daraus ergibt sich $y = 5 \cdot 20 = 100$ und $\lambda = \frac{3}{20}$. Einziger stationärer Punkt ist somit $(x, y, \lambda) = (20, 100, \frac{3}{20})$.

Für die hinreichende Bedingung gilt:

$$\begin{aligned} D(x,y,\lambda) &= L_{xx}(x,y,\lambda)\cdot L_{yy}(x,y,\lambda) - (L_{xy}(x,y,\lambda))^2 \\ &= \left(-\tfrac{3}{x^2}\right)\left(-\tfrac{15}{y^2}\right) - 0^2 \\ &= \tfrac{45}{x^2y^2} \end{aligned}$$

und $L_{xx}(x,y,\lambda) = -\dfrac{3}{x^2}$.

Für $x, y > 0$ ist $L_{xx}(x,y,\frac{3}{20}) <_{\text{immer}} 0$ und $D(x,y,\frac{3}{20}) >_{\text{immer}} 0$. Daher liegt in $(x,y) = (20,100)$ ein globales Maximum unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion vor.

2. Lösungsweg:

Die Lagrange-Funktion ist:

$$L(x,y,\lambda) = 3\ln(x) + 15\ln(y) + \lambda(x + y - 120)\,.$$

Für die notwendige Bedingung werden die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion gleich null gesetzt und nach λ aufgelöst:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & L_x(x,y,\lambda) = \frac{3}{x} + \lambda \overset{!}{=} 0 \iff \lambda = -\frac{3}{x} \\ \text{II} & L_y(x,y,\lambda) = \frac{15}{y} + \lambda \overset{!}{=} 0 \iff \lambda = -\frac{15}{y} \\ \text{III} & L_\lambda(x,y,\lambda) = x + y - 120 \overset{!}{=} 0 \end{array}$$

Gleichsetzen von I und II ergibt $-\dfrac{3}{x} = -\dfrac{15}{y} \iff y = 5x$.

Einsetzen in III ergibt

$$x + 5x - 120 = 0 \iff 6x = 120 \iff x = 20\,.$$

Daraus ergibt sich $y = 5\cdot 20 = 100$ und $\lambda = -\frac{3}{20}$. Einziger stationärer Punkt ist somit $(x,y,\lambda) = (20, 100, -\frac{3}{20})$.

Für die hinreichende Bedingung gilt:

$$\begin{aligned} D(x,y,\lambda) &= L_{xx}(x,y,\lambda)\cdot L_{yy}(x,y,\lambda) - (L_{xy}(x,y,\lambda))^2 \\ &= \left(-\tfrac{3}{x^2}\right)\left(-\tfrac{15}{y^2}\right) - 0^2 \\ &= \tfrac{45}{x^2y^2} \end{aligned}$$

und $L_{xx}(x,y,\lambda) = -\dfrac{3}{x^2}$.

Für $x, y > 0$ ist $L_{xx}(x,y,-\frac{3}{20}) <_{\text{immer}} 0$ und $D(x,y,-\frac{3}{20}) >_{\text{immer}} 0$. Daher liegt in $(x,y) = (20,100)$ ein globales Maximum unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion vor.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Zum Faktorisieren des Zählers werden die Nullstellen des Zählers z.B. mit Hilfe der p-q-Formel bestimmt:

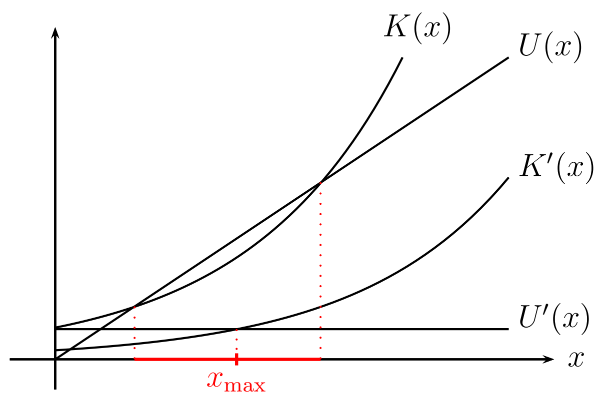
$$\begin{aligned} x^2 + x - 56 = 0 \quad &\iff x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 56} \\ &\iff x = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{15}{2} \\ &\iff x = 7 \text{ oder } x = -8 \,. \end{aligned}$$

Damit ist:

$$\lim_{x\to 7} \frac{x^2 + x - 56}{x - 7} = \lim_{x\to 7} \frac{(x-7)(x+8)}{x-7} = \lim_{x\to 7}(x+8) = 15 \,.$$

b) 1. Die Gewinnzone ist auf der x-Achse rot markiert.

2. An der Stelle $x_{\max}$ liegt ein Maximum der Gewinnfunktion.



c) 1. $x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} = 10 \iff y^{\frac{1}{3}} = \frac{10}{x^{\frac{2}{3}}} \iff y = \left(\frac{10}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^3 \iff y = \frac{1000}{x^2}$

2. Für $x = 10$ ergibt sich: $y = \dfrac{1000}{10^2} = 10$
d.h. vom zweiten Input müssen ebenfalls $y = 10$ Einheiten eingesetzt werden.