Finanzmathematik-Klausur am 28.09.2017

Aufgabe 1

Zu Beginn der Jahre 2019, 2022 und 2026 möchte eine Familie jeweils 10 000 Euro ihren Kindern als Ausbildungsbeihilfe zur Verfügung stellen. Für dieses Vorhaben werden ab 01.01.2013 bis 31.12.2025 vorschüssige (gleich hohe) Monatsbeträge auf ein Konto eingezahlt. Die drei Ausbildungsbeihilfen der Jahre 2019, 2022, 2026 werden von diesem Konto abgehoben. Der Zins beträgt 5% (p.a.).

a) Wie hoch müssen die vorschüssigen Monatsbeträge sein?

b) Berechnen Sie den Kontostand am 31.12.2018.

c) Berechnen Sie den Kontostand am 31.12.2021.

Aufgabe 2

a) Ein Bauherr erhält von der Kreditanstalt für Wiederaufbau einen Baukredit zu folgenden Konditionen angeboten:

Kreditvolumen:	120 000 GE
Zins:	6,15 % p.a.
Tilgungsart:	Prozent-Annuitätentilgung mit einer anfänglichen Tilgung von 1,32 %
Tilgungsfreie Jahre:	das erste Jahr nach Kreditaufnahme
Zahlweise:	jährlich nachschüssig

1. Stellen Sie den Tilgungsplan (bestehend aus Schuld am Jahresanfang, den jährlichen Zinsen, der jährlichen Tilgung, der Annuität und der Schuld am Jahresende) für das erste bis vierte Jahr auf.
2. Wie viele volle Annuitäten sind zu zahlen? Wie hoch ist der ein Jahr nach der letzten vollen Annuität zu zahlende Restbetrag?

b) Auf Grund einer Veränderung am Kapitalmarkt zwischen Beantragung und Auszahlung des Kredits fällt der jährliche Zinssatz. Wie verändern sich die Annuität und der anfängliche Tilgungssatz, wenn von folgenden Konditionen ausgegangen wird?

Kreditvolumen:	120 000 GE
Zins:	5,95 % p.a.
Tilgungsart:	Prozent-Annuitätentilgung
Tilgungsfreie Jahre:	das erste Jahr nach Kreditaufnahme
Laufzeit:	30 Jahre (inklusive des tilgungsfreien Jahres)
Zahlweise:	jährlich nachschüssig

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Wert der Abhebungen am 01.01.2013:
$$\frac{10\,000}{1{,}05^6} + \frac{10\,000}{1{,}05^9} + \frac{10\,000}{1{,}05^{13}} = 19\,211{,}46$$

Nachschüssige jährliche Ersatzrente r_J:
$$19\,211{,}46 = r_J \cdot \frac{1{,}05^{13} - 1}{0{,}05} \cdot \frac{1}{1{,}05^{13}} \Rightarrow r_J = 2\,045{,}17$$

Vorschüssige monatliche Rente r_M:
$2\,045{,}17 = r_M\,(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}05) \Rightarrow r_M = 165{,}94$
d.h. die vorschüssigen Monatsrente beträgt 165,95 Euro.

b) $2\,045{,}17 \cdot \dfrac{1{,}05^6 - 1}{0{,}05} = 13\,911{,}07$
d.h. der Kontostand am 31.12.2018 beträgt 13 911,07 Euro.

c) $3\,911{,}07 \cdot 1{,}05^3 + 2\,045{,}17 \cdot \dfrac{1{,}05^3 - 1}{0{,}05} = 10\,974{,}95$
d.h. der Kontostand am 31.12.2021 beträgt 10 974,95 Euro.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) 1. $A = (0{,}0615 + 0{,}0132)120\,000 = 7\,380 + 1\,584 = 8\,964$

Jahr	Schuld (JA)	Zinsen	Tilgung	Annuität	Schuld (JE)
1	120 000	7 380	–	7 380	120 000
2	120 000	7 380	1 584	8 964	118 416
3	118 416	7 282,58	1 681,42	8 964	116 734,58
4	116 734,58	7 179,18	1 784,82	8 964	114 949,76

2. $a_n = \dfrac{120\,000}{8\,964}$

$$n = -\frac{\ln\left[1 - a_n \cdot 0{,}0615\right]}{\ln 1{,}0615} = 29{,}04$$
d.h. 29 volle Annuitäten
$$K_{29} = 120\,000 \cdot 1{,}0615^{29} - 8\,964 \cdot \frac{1{,}0615^{29} - 1}{0{,}0615} = 357{,}57$$
$357{,}57 \cdot 1{,}0615 = 379{,}56$
d.h. die Restzahlung beträgt 379,56 GE

b) $A = 120\,000 \cdot 1{,}0595^{29} \cdot \dfrac{0{,}0595}{1{,}0595^{29} - 1} = 8\,783{,}36$
d.h. die Annuität beträgt 8 783,36
$8\,783{,}36 = 120\,000(0{,}0595 + t) \Rightarrow t = 0{,}0137$
d.h. die anfängliche Tilgung beträgt 1,37 %

QM I Klausur am 27.09.2017

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 5} \frac{9x-45}{3x^2-18x+15}$$

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \ln(x^2+1)$; $x \in \mathbb{R}$.

c) A, B, C seien (n,n)-Matrizen und E die (n,n)-Einheitsmatrix; $n \in \mathbb{N}$. Ferner bezeichnet A^t die transponierte Matrix (Transponierte) von A.
Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie, soweit es geht, zusammen:

1. $(A^t \cdot 5B)^t$
2. $E(A-C)B - A(2B-C)$
3. $(A+B)^t - (2A \cdot E)^t$

Aufgabe 2

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 5x_1 - 2x_2 + 300x_3 & = & 3\,100 \\ \text{II} & 3x_1 + 4x_2 - 340x_3 & = & 300 \\ \text{III} & 2x_1 + 2x_2 - 160x_3 & = & 400 \end{array}$$

a) Bestimmen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

b) Geben Sie alle nichtnegtiven Lösungen an.

c) Bestimmen Sie die nichtnegativen ganzzahligen Lösungen.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mithilfe der Lagrange-Methode die globale Minimalstelle der Funktion

$$f(x,y) = 4x^2 + 5y^2 - 2xy + 200 \;\; ; x, y \in \mathbb{R}$$

unter der Nebenbedingung $x + 2y = 50$.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Durch Einsetzen von $x = 5$ ergibt sich: Nenner=0=Zähler

1. Lösungsweg: (Regel von de l'Hôpital)

$$\lim_{x\to 5} \frac{9x-45}{3x^2-18x+15} = \lim_{x\to 5} \frac{9}{6x-18} = \frac{9}{30-18} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

2. Lösungsweg: (Faktorisieren und Kürzen)

$$\lim_{x\to 5} \frac{9x-45}{3x^2-18x+15} = \lim_{x\to 5} \frac{9(x-5)}{3(x-5)(x-1)} = \lim_{x\to 5} \frac{9}{3(x-1)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

b) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

c) 1. $(A^t \cdot 5B)^t = (5B)^t \cdot A = 5 \cdot B^t \cdot A$

2. $E(A-C)B - A(2B-C) = AB - CB - 2AB + AC = -AB - CB + AC =$
$$\begin{cases} A(C-B) - CB \\ AC - (A+C)B \end{cases}$$

3. $(A+B)^t - (2A \cdot E)^t = A^t + B^t - 2A^t = B^t - A^t = (B-A)^t$

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
①	5	-2	300	3 100	
②	3	4	-340	300	
③	$\boxed{2}$	2	-160	400	
④	2	2	-160	400	③
⑤	0	-14	1 400	4 200	$2 \cdot$ ① $-5 \cdot$ ③
⑥	0	$\boxed{2}$	-200	-600	$2 \cdot$ ② $-3 \cdot$ ③
⑦	2	2	-160	400	④
⑧	0	2	-200	-600	⑥
⑨	0	0	0	0	⑤ $+7 \cdot$ ⑥

Zeile ⑧: $2x_2 - 200x_3 = -600 \Leftrightarrow x_2 = 100x_3 - 300$

Zeile ⑦: $2x_1 + 2(100x_3 - 300) - 160x_3 = -400 \Leftrightarrow 2x_1 + 40x_3 - 600 = 400 \Leftrightarrow x_1 = 500 - 20x_3$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich somit wie folgt:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 500 - 20x_3 \\ 100x_3 - 300 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \}$$

b) $x_1 = 500 - 20x_3 \geq 0 \Leftrightarrow 500 \geq 20x_3 \Leftrightarrow 25 \geq x_3 \Leftrightarrow x_3 \leq 25$
$x_2 = 100x_3 - 300 \geq 0 \Leftrightarrow 100x_3 \geq 300 \Leftrightarrow x_3 \geq 3$
$x_3 \geq 0$

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 500 - 20x_3 \\ 100x_3 - 300 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in [3; 25] \}$$

c) $$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 500 - 20x_3 \\ 100x_3 - 300 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \{3, 4, 5, \ldots, 25\} \}$$

Lösung zu Aufgabe 3

Lagrange-Methode

$L(x, y, \lambda) = 4x^2 + 5y^2 - 2xy + 200 + \lambda(x + 2y - 50)$

$$\begin{array}{lcl lcl} L_x(x,y,\lambda) & = & 8x - 2y + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & 8 \\ L_y(x,y,\lambda) & = & 10y - 2x + 2\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & 10 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & x + 2y - 50 & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & -2 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

I	$0 = 8x - 2y + \lambda$
II	$0 = 10y - 2x + 2\lambda$
III	$0 = x + 2y - 50$
$\mathrm{I} - 0{,}5 \cdot \mathrm{II}$	$0 = 9x - 7y \Leftrightarrow 7y = 9x \Leftrightarrow y = \frac{9}{7}x$
III	$0 = x + \frac{18}{7}x - 50 = \frac{25}{7}x - 50 \Leftrightarrow x = 50 \cdot \frac{7}{25} = 14 \Rightarrow y = \frac{9}{7} \cdot 14 = 18$

Der Wert von λ_0 wird nicht benötigt.
d.h. $(14; 18; \lambda_0)$ ist ein stationärer Punkt.
Hinreichende Bedingung:
$D(x, y, \lambda_0) = 8 \cdot 10 - (-2)^2 = 76 >_{\text{immer}} 0$
$L_{xx}(x, y, \lambda_0) = 8 >_{\text{immer}} 0$
d.h. $f(x, y)$ hat in $(14; 18)$ eine globale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

QM II Klausur am 28.09.2017

Aufgabe 1

Frau A. hat am 01.01.2017 einen Kredit von 20 000 € aufgenommen. Die Jahreszinsen betragen 2,1%.

a) Nach wie vielen vollen Jahren übersteigen die Schulden erstmals den Betrag von 22 600 €

   1. bei linearer Verzinsung?
   2. bei nachschüssiger Verzinsung?

b) Frau A. möchte die Schulden zurückzahlen durch vorschüssige Quartalsraten in den Jahren 2017, 2018, 2019 und 2020. Wie hoch sind diese Quartalsraten?

c) Frau A. möchte die Schulden zurückzahlen durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von 350 €, erste Monatrsate fällig am 31.01.2017.

   1. Wie viele volle Monatsraten sind zu zahlen?
   2. Wie hoch ist die Restschuld unmittelbar nach Zahlung der letzten vollen Monatsrate?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) 1. $22\,600 = 20\,000(1 + n \cdot 0{,}021) \Leftrightarrow 1{,}13 = 1 + n \cdot 0{,}021 \Leftrightarrow 0{,}13 = n \cdot 0{,}021 \Leftrightarrow n = 6{,}190476$
   d.h. bei linearer Verzinsung übersteigen die Schulden erstmals den Wert von 22 600 € nach sieben Jahren.
   2. $n = \dfrac{\ln \frac{22\,600}{20\,000}}{\ln 1{,}021} = 5{,}880784$
   d.h. bei nachschüssiger Verzinsung übersteigen die Schulden erstmals den Wert von 22 600 € nach sechs Jahren.

b) $20\,000 = r_J \cdot \dfrac{1{,}021^4 - 1}{0{,}021} \cdot \dfrac{1}{1{,}021^4} = r_J \cdot 3{,}798506 \Leftrightarrow r_J = 5\,265{,}227$
   $5\,265{,}227 = r'_U \cdot (4 + 2{,}5 \cdot 0{,}021) = r'_U \cdot 4{,}0525 \Leftrightarrow r'_U = 1\,299{,}254$
   d.h. die Quartalsraten betragen 1 299,25 €.

c) $r_J = 350 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}021) = 4\,240{,}425$

   1. $n = -\dfrac{\ln \left[1 - \frac{20\,000}{4\,240{,}425} \cdot 0{,}021\right]}{\ln 1{,}021} = 5{,}018724$
   d.h. es sind $5 \cdot 12 = 60$ volle Monatsraten zu zahlen. (Die letzte volle Monatsrate ist fällig am 31.12.2021.)
   2. $K_5 = 20\,000 \cdot 1{,}021^5 - 4\,240{,}425 \cdot \dfrac{1{,}021^5 - 1}{0{,}021} = 78{,}56003$
   d.h. die Restschuld beträgt 78,56 €.