Wirtschaftsmathematik-Klausur vom 29.09.2014

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1

Jede der drei Kostenstellen K_1, K_2 und K_3 eines Unternehmens erbringt Leistungen (in Leistungseinheiten) für die jeweils anderen Kostenstellen und für Kunden außerhalb des Unternehmens gemäß folgender Tabelle:

	an K_1	an K_2	an K_3	an Kunden
von K_1	0	10	20	70
von K_2	15	0	35	50
von K_3	30	45	0	25

Primärkosten fallen bei K_1 in Höhe von 35 GE, bei K_2 in Höhe von 100 GE und bei K_3 in Höhe von 255 GE an.

a) Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der innerbetrieblichen Verrechnungspreise auf.

b) Bestimmen Sie die innerbetrieblichen Verrechnungspreise mit dem Gaußalgorithmus.

Aufgabe 2

1. Teilaufgabe: Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2x^2 - 8x - 42}{5x - 35}$.

2. Teilaufgabe: Gegeben sei die Gesamtkostenfunktion $K(x)$ eines Monopolisten mit
$K(x) = 3x^2 - 4x + 56 \;\; ; x \in [0; 12]$
Die produzierte Menge x (in ME) kann am Markt in Abhängigkeit des Preises p (in GE pro ME) gemäß der folgenden Preis-Absatz Funktion abgesetzt werden:
$x(p) = 12 - 0{,}2p \;\; ; p \in [0; 60]$.

a) Bestimmen Sie die Elastizität von $x(p)$ in $p_0 = 6$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Berechnen Sie die Gewinnfunktion, geben Sie deren Definitionsbereich an und bestimmen Sie die Gewinnzone.

c) Berechnen Sie den maximalen Gewinn und den dazugehörigen gewinnmaximalen Preis.

Aufgabe 3

Gegeben sei die folgende Funktion:
$$f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2y^2 + z^3 - 27z + 2x - 2ay + 100 \;\; ; x, y, z \in \mathbb{R}.$$
Dabei sei a eine beliebige reelle Zahl.

a) Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

b) Bestimmen Sie alle (x, y, z)-Kombinationen (stationäre Punkte), an denen ein streng relativer (lokaler) Extremwert liegen kann.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Seien v_1, v_2 und v_3 die Bewertungen (in GE) für die Herstellung je einer Leistungseinheit der drei Kostenstellen. Werden für jede Kostenstelle die empfangenen von den abgegebenen Leistungen abgezogen, so müssen die Primärkosten gerade gedeckt sein:

$$\begin{aligned}(70+10+20)v_1 - 15v_2 - 30v_3 &= 35\\ (50+15+35)v_2 - 10v_1 - 45v_3 &= 100\\ (25+30+45)v_3 - 20v_1 - 35v_2 &= 255\end{aligned}$$

b) Mit dem Gaußalgorithmus ergibt sich:

Zeile	v_1	v_2	v_3		Operation
1	100	-15	-30	35	
2	$\boxed{-10}$	100	-45	100	
3	-20	-35	100	255	
4	-10	100	-45	100	2
5	0	985	-480	1 035	1 $+10\cdot$ 2
6	0	$\boxed{-235}$	190	55	3 $-2\cdot$ 2
7	-10	100	-45	100	4
8	0	-235	190	55	6
9	0	0	74 350	297 400	$235\cdot$ 5 $+985\cdot$ 6

Aus Zeile 9 ergibt sich: $74\,350v_3 = 297\,400 \iff v_3 = 4$.

Einsetzen in Zeile 8 ergibt: $-235v_2 + 190\cdot 4 = 55 \iff v_2 = 3$.

Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $-10v_1 + 100\cdot 3 - 45\cdot 4 = 100 \iff v_1 = 2$.

Lösung zu Aufgabe 2.1:

$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-8x-42}{5x-35} = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2(x^2-4x-21}{5(x-7)} = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2(x-7)(x+3)}{5(x-7)} = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2(x+3)}{5} = \dfrac{2(7+3)}{5} = 4$

Lösung zu Aufgabe 2.2:

a) $x'(p) = -0{,}2$
$\epsilon_x(6) = x'(6)\cdot\frac{6}{x(6)} = -0{,}2\cdot\frac{6}{10{,}8} = -0{,}\overline{1}$; d.h. wird der Preis von 6 GE um ein Prozent erhöht auf 6,06 GE, so sinkt der Absatz um $0{,}\overline{1}$ Prozent.

b) Umkehrabbildung $p(x)$:
$x = 12 - 0{,}2p \Leftrightarrow 0{,}2p = 12 - x \Leftrightarrow p = 60 - 5x$

d.h. $p(x) = 60 - 5x \;\; ; x \in [0; 12]$.
$U(x) = p(x) \cdot x = 60x - 5x^2 \;\; ; x \in [0; 12]$.
$G(x) = U(x) - K(x) = -8x^2 + 64x - 56 = 0 \;\; ; x \in [0; 12]$.
$G(x) = -8x^2 + 64x - 56 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{16-7} = 4 \pm 3$
d.h. $x = 1$ oder $x = 7$.
Da $G(0) = -56$ beträgt, lautet die Gewinnzone (1;7).

c) $0 = G'(x) = -16x + 64 \Leftrightarrow x = 4$
$G''(x) = -16 <_{\text{immer}}$; d.h. $x = 4$ globale Maximalstelle
$G(4) = 72$; d.h. der maximale Gewinn beträgt 72 GE und der Gewinn-maximale Preis beträgt $p(4) = 60 - 20 = 40$ GE.

Lösung zu Aufgabe 3:

a)
$$\begin{array}{rclrclrcl}
f_x(x,y,z) & = & 2x+2y+2 & f_{xx}(x,y,z) & = & 2 & f_{xy}(x,y,z) & = & 2 \\
f_y(x,y,z) & = & 2x+4y-2a & f_{yy}(x,y,z) & = & 4 & f_{xz}(x,y,z) & = & 0 \\
f_z(x,y,z) & = & 3z^2-27 & f_{zz}(x,y,z) & = & 6z & f_{yz}(x,y,z) & = & 0
\end{array}$$

b) Notwendige Bedingung:
$$\begin{array}{lrcl}
\mathrm{I} & 0 & = & 2x+2y+2 \\
\mathrm{II} & 0 & = & 2x+4y-2a \\
\mathrm{III} & 0 & = & 3z^2-27 \Leftrightarrow z^2 = 9 \Leftrightarrow z = \pm 3 \\
\hline
\mathrm{II}-\mathrm{I} & 0 & = & 2y-2a-2 \Leftrightarrow y = a+1 \\
\mathrm{I} & 0 & = & 2x+4(a+1)-2a = 2x+2a+4 \Leftrightarrow x = -a-2
\end{array}$$
d.h. $(-a-2; a+1; 3)$ und $(-a-2; a+1; -3)$ sind stationäre Punkte.