Finanzmathematik-Klausur am 31.01.2018

Aufgabe 1

Auf ein Sparkonto zahlt ein Elternpaar bei 4% Jahreszinsen zur Finanzierung des Studiums eines Kindes wie folgt Beträge ein:

- Einzahlung am 31.12.2006 über 1 000 €
- Einzahlung am 31.12.2008 über 2 000 €
- Einzahlung am 31.12.2011 über 3 000 €
- regelmäßige Einzahlungen am Ende eines jeden Monats über 100 € ab dem Jahr 2010 bis einschließlich dem Jahr 2020.

a) Wie hoch ist das Guthaben am 31.12.2024?

b) Wie viele volle Jahre lang können ab dem Jahr 2025 aus dem Guthaben jeweils 550 € zu Beginn eines Monats entnommen werden?

c) Welche gleich hohen regelmäßigen Abhebungen jeweils zu Beginn eines Monats können ab dem Jahr 2025 über sechs Jahre aus dem angesparten Guthaben entnommen werden?

Aufgabe 2

Eine Familie kauft für 220 000 € ein Haus. Dazu nimmt sie bei 6% Zinsen p.a. von einer Bank einen Kredit in Höhe von 60% des Kaufpreises auf. Zur Rückzahlung des Kredits wird vereinbart, zu Beginn eines jeden Quartals 4 000 € an die Bank zu überweisen. Die erste Rückzahlung ist fällig bei Darlehnsaufnahme.

a) Wie viele Jahre lang sind volle Rückzahlungen zu leisten?

b) Wie hoch ist die Restschuld zu Beginn des neunten Jahres?

c) Zu Beginn des neunten Jahres nach Kreditaufnahme soll die noch bestehende Schuld durch eine einmalige Restzahlung zurückgezahlt werden. Für die vorzeitige Rückzahlung erhebt die Bank wegen entgangener Zinsen eine so genannte Vorfälligkeitsentschädigung in Höhe von 2,5% des vorzeitig zurückgezahlten Kapitals. Welcher Betrag ist dann zu Beginn des neunten Jahres an die Bank zu zahlen?

Lösung zu Aufgabe 1

a) Guthaben am 31.12.2020:

$$1000 \cdot 1{,}04^{14} + 2000 \cdot 1{,}04^{12} + 3000 \cdot 1{,}04^{9} + 100 \cdot (12 + 5{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \frac{1{,}04^{11} - 1}{0{,}04} = 25\,684$$

Guthaben am 31.12.2024:
$25\,684 \cdot 1{,}04^4 = 30\,046{,}65$
d.h. das Guthaben beträgt 30 046,65 €.

b) $n = -\dfrac{\ln[1 - \frac{30\,046{,}65}{550\cdot(12+6{,}5\cdot 0{,}04)} \cdot 0{,}04]}{\ln 1{,}04} = 5{,}005155$

d.h. volle fünf Jahre lang können die Beträge entnommen werden.

c) $30\,046{,}65 = r'_M \cdot (12 + 6{,}5 \cdot 0{,}04) \cdot \dfrac{1{,}04^6 - 1}{0{,}04} \cdot \dfrac{1}{1{,}04^6} \Rightarrow r'_M = 467{,}52$

d.h. über sechs Jahre können 467,52 € jeweils zu Beginn eine Monats entnommen werden.

Lösung zu Aufgabe 2

$0{,}6 \cdot 220\,000 = 132\,000$

a) Jährliche nachschüssige Ersatzrente r_J:

$r_J = 4\,000(4 + \frac{5}{2} \cdot 0{,}06) = 16\,600$

Laufzeit bei bekanntem Barwert:

$r_J = -\dfrac{\ln[1 - \frac{132\,000}{16\,600} \cdot 0{,}06]}{\ln 1{,}06} = 11{,}1274$

d.h. elf Jahre lang sind volle Rückzahlungen zu leisten.

b) $K_8 = 132\,000 \cdot 1{,}06^8 - 16\,600 \cdot \dfrac{1{,}06^8 - 1}{0{,}06} = 210\,387{,}95 - 164\,297{,}97 = 46\,089{,}98$

d.h. zu Beginn des neunten Jahres beträgt die Restschuld 46 089,98 €.

c) $46\,089{,}98 \cdot 1{,}025 = 1\,152{,}25 + 46\,089{,}98 = 47\,242{,}23$

d.h. es sind 47 242,23 € zu zahlen.

QM I Klausur am 30.01.2018

Aufgabe 1

a) Gegeben sei die Preis-Absatz Funktion

$$x(p) = 440 - 4p \ ; p \in [0; 110]$$

Berechnen Sie die Elastizität von $x(p)$ an der Stelle $p = 30$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ \ x \in \mathbb{R}$$

der Gleichung

$$f'(x) = 1 - [f(x)]^2$$

genügt.

c) Bestimmen Sie die Sattelstellen der Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 + 16x - 5xy + 3y - 2y^2 + 5 \ ; (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = & 41 \\ \text{II} & 3x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 19 \\ \text{III} & 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 & = & 52 \end{array}$$

b) Das Endtableau eines Gaußalgorithmus sieht wie folgt aus:

Zeile	x_1	x_2	x_3	
1	3	2	-10	102
2	0	10	-80	-240
3	0	0	0	0

1. Bestimmen Sie mit dem Gaußalgorithmus die Lösungsmenge des zugrunde liegenden Gleichungssystems.
2. Bestimmen Sie alle nichtnegtiven Lösungen.
3. Bestimmen Sie alle ganzzahligen nichtnegativen Lösungen.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 5x + 2y^2 - 9y - xy + 111 \ ; x, y > 0$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y = 10$$

mithilfe der Lagrange-Methode.

Lösung zu Aufgabe 1

a) $x(30) = 320$
$x'(p) = -4$
$\varepsilon_x(30) = (-4) \cdot \dfrac{30}{320} = -\dfrac{3}{8} = -0{,}375$
d.h. steigt der Preis von 30 GE um ein Prozent, so sinkt der Absatz um 0,375%.

b) *1. Lösungsweg:*

$$f'(x) = \frac{\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)-\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2} =$$

$$\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2} = 1-\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2} = 1-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2 = 1-(f(x))^2$$

2. Lösungsweg:

$$f'(x) = \frac{\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)-\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2} = \frac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$$

$$1-[f(x)]^2 = 1-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2 = 1-\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2} = \frac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$$

c) $f_x(x,y) = 6x+16-5y \quad f_{xx}(x,y) = 6$
$f_y(x,y) = -5x+3-4y \quad f_{yy}(x,y) = -4$
$f_{xy}(x,y) = -5$

Notwendige Bedingung:

I	0	$=$	$6x+16-5y$
II	0	$=$	$-5x+3-4y$
$4 \cdot \mathrm{I}$	0	$=$	$24x+64-20y$
$5 \cdot \mathrm{II}$	0	$=$	$-25x+15-20y$
$4 \cdot \mathrm{I} - 5 \cdot \mathrm{II}$	0	$= 49x+49$	$\Leftrightarrow x=-1$ und $0=-6+16-5y=10-5y \Leftrightarrow y=2$

d.h. $(-1;2)$ ist ein stationärer Punkt.
Hinreichende Bedingung:
$D(-1;2) = -24-25 = -49 =< 0$
d.h. $(-1;2)$ ist eine Sattelstelle

Lösung zu Aufgabe 2

a) Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	$\boxed{2}$	3	4	41	
2	3	-1	5	19	
3	5	2	7	52	
4	2	3	4	41	1
5	0	$\boxed{-11}$	-2	-85	$2 \cdot$ 2 $-3 \cdot$ 1
6	0	-11	-6	-101	$2 \cdot$ 3 $-5 \cdot$ 1
7	2	3	4	41	4
8	0	-11	-2	-85	5
9	0	0	-4	-16	6 $-$ 5

Zeile 9: $-4x_3 = -16 \iff x_3 = 4$.

Einsetzen in Zeile 8 ergibt: $-11x_2 - 8 = -85 \iff x_2 = 7$.

Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $2x_1 + 21 + 16 = 41 \iff x_1 = 2$.

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich somit wie folgt:

$$\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}\}$$

b)

1. Zeile 2: $10x_2 - 80x_3 = -240 \Leftrightarrow 10x_2 = 80x_3 - 240 \Leftrightarrow x_2 = 8x_3 - 24$
   Zeile 1: $3x_1 + 2(8x_3 - 24) - 10x_3 = 102 \Leftrightarrow 3x_1 - 48 + 6x_3 = 102 \Leftrightarrow 3x_1 = 150 - 6x_3 \Leftrightarrow x_1 = 50 - 2x_3$
   d.h. $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 50 - 2x_3 \\ 8x_3 - 24 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.
2. $x_1 = 50 - 2x_3 \geq 0 \Leftrightarrow 50 \geq 2x_3 \Leftrightarrow 25 \geq x_3 \Leftrightarrow x_3 \leq 25$
   $x_2 = 8x_3 - 24 \geq 0 \Leftrightarrow 8x_3 \geq 24 \Leftrightarrow x_3 \geq 3$
   $x_3 \geq 0$
   $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 50 - 2x_3 \\ 8x_3 - 24 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in [3; 25] \right\}$.
3. $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 50 - 2x_3 \\ 8x_3 - 24 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \{3; 4; 5; \ldots; 25\} \right\}$.

Lösung zu Aufgabe 3

$L(x, y, \lambda) = x^3 + 3x^2 + 5x + 2y^2 - 9y - xy + 111 + \lambda(x + y - 10)$

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 3x^2 + 6x + 5 - y + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= 6x + 6 \\ L_y(x,y,\lambda) &= 4y - 9 - x + \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= 4 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x + y - 10 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= -1 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:

I	$0 = 3x^2 + 6x + 5 - y + \lambda$
II	$0 = 4y - 9 - x + \lambda$
III	$0 = x + y - 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$
I − II	$0 = 3x^2 + 7x - 5y + 14 = 3x^2 + 7x - 5(10 - x) + 14 = 3x^2 + 12x - 36 \Leftrightarrow 0 = x^2 + 4x - 12$

$$\Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{4 + 12} = -2 \pm 4 \Leftrightarrow \underbrace{x = -6}_{\notin \text{ Def.bereich}} \quad \text{oder } x = 2 \Rightarrow y = 8$$

Der Wert von λ_0 wird nicht benötigt.
d.h. $(2; 8; \lambda_0)$ ist ein stationärer Punkt.
Hinreichende Bedingung:
$D(x, y, \lambda_0) = (6x + 6) \cdot 4 - (-1)^2 = 24x + 23$
$D(2; 8; \lambda_0) = 48 + 23 > 0$
$L_{xx}(2; 8; \lambda_0) = 6 \cdot 2 + 6 = 18 > 0$
d.h. $f(x, y)$ hat in $(2; 8)$ eine lokale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

QM II Klausur am 31.01.2018

Aufgabe

Der Autoändler A bietet bei 0,9 % Jahreszins für einen Ratenkauf eines VW T6 das folgende Finanzierungsmodell an:

- Anzahlung in Höhe von 4 000 Euro, fällig sofort
- vorschüssige Monatsraten in Höhe von 562 Euro über vier Jahre, erste Rate fällig mit der Anzahlung
- Restzahlung (Schlussrate) nach vier Jahren in Höhe von 34 707,90 Euro

a) Wie hoch dürfte bei einem Barkauf der Verkaufspreis höchstens sein, damit der Barkauf günstiger wäre als das Finanzierungsmodell?

b) Der Autohändler B bietet für den gleichen Wagen ebenfalls bei 0,9 % Jahreszins das folgende Finanzierungsmodell an:

- Anzahlung über 5 000 Euro
- Quartalsraten über fünf Jahre, erste Rate fällig mit der Anzahlung
- Restzahlung (Schlussrate) in Höhe von 35 000 Euro nach fünf Jahren.

Wie hoch müssen die Quartalsraten bemessen sein, damit die Finanzierungsmodelle der beiden Händler gleichwertig sind, d.h. die selben Barwerte haben? *Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass sich der Barwert des Angebots von Händler A auf 63 994,43 Euro beläuft.*

Lösung zu Aufgabe

a) $r_J = 562(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}009) = 6\,776{,}877$

$$R_0 = 6\,776{,}877 \cdot \frac{1{,}009^4 - 1}{0{,}009} \cdot \frac{1}{1{,}009^4} = 26\,508{,}40$$

$$K_0 = 4\,000 + 26\,508{,}40 + \frac{34\,707{,}90}{1{,}009^4} = 63\,994{,}43$$

d.h. der Verkaufspreis dürfte höchstens 63 994,42 Euro betragen, damit der Barkauf günstiger wäre als das Finanzierungsmodell.

b) $$R_0 = 63\,994{,}43 - 5\,000 - \frac{35\,000}{1{,}009^5} = 25\,527{,}78$$

$$25\,527{,}78 = r_J \cdot \frac{1{,}009^5 - 1}{0{,}009} \cdot \frac{1}{1{,}009^5} \Leftrightarrow r_J = 5\,244{,}23$$

$$5\,244{,}23 = r'_Q(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}009) \Leftrightarrow r'_Q = 1\,303{,}724$$

d.h. die Quartalsraten müssen 1 303,72 Euro betragen.