QM I Klausur am 30.01.2018

Aufgabe 1

a) Gegeben sei die Preis-Absatz Funktion

$$x(p) = 440 - 4p \ \ ; p \in [0; 110]$$

Berechnen Sie die Elastizität von $x(p)$ an der Stelle $p = 30$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ \ x \in \mathbb{R}$$

der Gleichung

$$f'(x) = 1 - [f(x)]^2$$

genügt.

c) Bestimmen Sie die Sattelstellen der Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 + 16x - 5xy + 3y - 2y^2 + 5 \ \ ; (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = & 41 \\ \text{II} & 3x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 19 \\ \text{III} & 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 & = & 52 \end{array}$$

b) Das Endtableau eines Gaußalgorithmus sieht wie folgt aus:

Zeile	x_1	x_2	x_3	
①	3	2	-10	102
②	0	10	-80	-240
③	0	0	0	0

1. Bestimmen Sie mit dem Gaußalgorithmus die Lösungsmenge des zugrunde liegenden Gleichungssystems.
2. Bestimmen Sie alle nichtnegtiven Lösungen.
3. Bestimmen Sie alle ganzzahligen nichtnegativen Lösungen.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 5x + 2y^2 - 9y - xy + 111 \ \ ; x, y > 0$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y = 10$$

mithilfe der Lagrange-Methode.

Lösung zu Aufgabe 1

a) $x(30) = 320$
$x'(p) = -4$
$\varepsilon_x(30) = (-4) \cdot \frac{30}{320} = -\frac{3}{8} = -0{,}375$
d.h. steigt der Preis von 30 GE um ein Prozent, so sinkt der Absatz um 0,375%.

b) *1. Lösungsweg:*

$$f'(x) = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} =$$

$$\frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = 1 - \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = 1 - (f(x))^2$$

2. Lösungsweg:

$$f'(x) = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$1 - [f(x)]^2 = 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = 1 - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

c) $f_x(x,y) = 6x + 16 - 5y \quad f_{xx}(x,y) = 6$
$f_y(x,y) = -5x + 3 - 4y \quad f_{yy}(x,y) = -4$
$f_{xy}(x,y) = -5$

Notwendige Bedingung:

I	0	=	$6x + 16 - 5y$
II	0	=	$-5x + 3 - 4y$
$4 \cdot \mathrm{I}$	0	=	$24x + 64 - 20y$
$5 \cdot \mathrm{II}$	0	=	$-25x + 15 - 20y$
$4 \cdot \mathrm{I} - 5 \cdot \mathrm{II}$	0	$= 49x + 49$	$\Leftrightarrow x = -1$ und $0 = -6 + 16 - 5y = 10 - 5y \Leftrightarrow y = 2$

d.h. $(-1; 2)$ ist ein stationärer Punkt.
Hinreichende Bedingung:
$D(-1; 2) = -24 - 25 = -49 =< 0$
d.h. $(-1; 2)$ ist eine Sattelstelle

Lösung zu Aufgabe 2

a) Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	$\boxed{2}$	3	4	41	
2	3	-1	5	19	
3	5	2	7	52	
4	2	3	4	41	1
5	0	$\boxed{-11}$	-2	-85	$2 \cdot$ 2 $-3 \cdot$ 1
6	0	-11	-6	-101	$2 \cdot$ 3 $-5 \cdot$ 1
7	2	3	4	41	4
8	0	-11	-2	-85	5
9	0	0	-4	-16	6 $-$ 5

Zeile 9: $-4x_3 = -16 \iff x_3 = 4$.

Einsetzen in Zeile 8 ergibt: $-11x_2 - 8 = -85 \iff x_2 = 7$.

Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $2x_1 + 21 + 16 = 41 \iff x_1 = 2$.

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich somit wie folgt:

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \}$$

b)
1. Zeile 2: $10x_2 - 80x_3 = -240 \Leftrightarrow 10x_2 = 80x_3 - 240 \Leftrightarrow x_2 = 8x_3 - 24$
   Zeile 1: $3x_1 + 2(8x_3 - 24) - 10x_3 = 102 \Leftrightarrow 3x_1 - 48 + 6x_3 = 102 \Leftrightarrow 3x_1 = 150 - 6x_3 \Leftrightarrow x_1 = 50 - 2x_3$
   d.h. $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 50 - 2x_3 \\ 8x_3 - 24 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.
2. $x_1 = 50 - 2x_3 \geq 0 \Leftrightarrow 50 \geq 2x_3 \Leftrightarrow 25 \geq x_3 \Leftrightarrow x_3 \leq 25$
   $x_2 = 8x_3 - 24 \geq 0 \Leftrightarrow 8x_3 \geq 24 \Leftrightarrow x_3 \geq 3$
   $x_3 \geq 0$
   $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 50 - 2x_3 \\ 8x_3 - 24 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_3 \in [3; 25] \right\}$.
3. $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 50 - 2x_3 \\ 8x_3 - 24 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_3 \in \{3; 4; 5; \ldots; 25\} \right\}$.

Lösung zu Aufgabe 3

$L(x, y, \lambda) = x^3 + 3x^2 + 5x + 2y^2 - 9y - xy + 111 + \lambda(x + y - 10)$

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 3x^2 + 6x + 5 - y + \lambda & \quad L_{xx}(x,y,\lambda) &= 6x + 6 \\ L_y(x,y,\lambda) &= 4y - 9 - x + \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= 4 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x + y - 10 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= -1 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & 0 = 3x^2 + 6x + 5 - y + \lambda \\
\text{II} & 0 = 4y - 9 - x + \lambda \\
\text{III} & 0 = x + y - 10 \Leftrightarrow y = 10 - x \\
\hline
\text{I} - \text{II} & 0 = 3x^2 + 7x - 5y + 14 = 3x^2 + 7x - 5(10 - x) + 14 = 3x^2 + 12x - 36 \Leftrightarrow 0 = x^2 + 4x - 12
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{4 + 12} = -2 \pm 4 \Leftrightarrow \quad \underbrace{x = -6}_{\notin \text{ Def.bereich}} \quad \text{oder } x = 2 \Rightarrow y = 8$$

Der Wert von λ_0 wird nicht benötigt.
d.h. $(2; 8; \lambda_0)$ ist ein stationärer Punkt.
Hinreichende Bedingung:
$D(x, y, \lambda_0) = (6x + 6) \cdot 4 - (-1)^2 = 24x + 23$
$D(2; 8; \lambda_0) = 48 + 23 > 0$
$L_{xx}(2; 8; \lambda_0) = 6 \cdot 2 + 6 = 18 > 0$
d.h. $f(x, y)$ hat in $(2; 8)$ eine lokale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.