

QM III-Klausur am 30.01.2018

Aufgabe 1

a) Es soll ein 0,92-Konfidenzintervall für den Anteil der Fahrten unter Alkoholeinfluss bei einem groben Verstoß gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung berechnet werden. Ein grober Verstoß liegt genau dann vor, wenn die Geschwindigkeitsüberschreitung mindestens 21 km/h beträgt.

1. Wie viele grobe Verstöße gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung müssten mindestens ausgewertet werden, damit die Abweichung des Anteils der Fahrten unter Alkoholeinfluss bei einem groben Verstoß gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung höchstens 5%-Punkte beträgt?
2. In einem Kölner Veddel wurden im 1. Halbjahr 2017 genau 440 grobe Verstöße gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung festgestellt. Davon wurden 88 Verstöße unter Alkoholeinfluss begangen. Berechnen und interpretieren Sie das gesuchte Konfidenzintervall.

b) Nehmen Sie an, dass der Anteil der Fahrten unter Alkoholeinfluss bei einem groben Verstoß gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung 20% beträgt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Geschwindigkeitskontrolle mit zehn groben Verstößen gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung

1. kein Fahrer
2. höchstens zwei Fahrer
3. mindestens zwei Fahrer

unter Alkoholeinfluss stehen.

Aufgabe 2

Prüfen Sie mit einem Test zum Niveau 0,05 anhand der nachfolgenden Stichprobe, ob der Besitz eines Computers und das Alter stochastisch unabhängig sind. Die Stichprobe ergab sich aus einer Befragung in den USA:

Besitz eines Computers	Alter		Summe
	≤ 50	51+	
nein	860	961	
ja	1 969	1 210	
Summe			

Gehen Sie wie folgt vor:

1. Wie heißt der Test?
2. Wie lautet die Nullhypothese des Tests?
3. Überprüfen Sie, ob die Faustregel des Tests erfüllt ist.

4. Berechnen Sie den empirischen Wert der Teststatistik.
5. Wie lautet die Testentscheidung aufgrund der obigen Stichprobe? (Begründung!) Interpretieren Sie in knappen Worten das Ergebnis.

Lösung zu Aufgabe 1

a) p =Anteil der Fahrten unter Alkoholeinfluss bei einem groben Verstoß gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung

96%-Punkt der NV ist 1,7507

1. $n \geq \frac{1,7507^2 \cdot 0,25}{0,05^2} = 306,495$

d.h. es sind mindestens 307 grobe Verstöße gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung auf Alkoholkonsum zu untersuchen.

2. Faustregel $n = 440 \geq 100$ erfüllt.

$$0,92\text{-KI für } p = \frac{88}{440} \pm 1,7507 \cdot \sqrt{\frac{\frac{88}{440} \cdot \frac{352}{440}}{440}} = 0,2 \pm 0,03338454 = [0,17; 0,23]$$

d.h. [17%;23%] ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem p mit einer Wahrscheinlichkeit von 92% liegt.

b) X =Anzahl der Fahrer mit einem groben Verstoß gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung, die zudem noch unter Alkoholeinfluss stehen

$X \sim B(n = 10; p = 0,2)$

1. $P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{10} = 0,1074$

2. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,1074 + \binom{10}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^8 = 0,1074 + 0,2684 + 0,3020 = 0,6778$

3. $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,1074 - 0,2684 = 1 - 0,3758 = 0,6242$

Lösung zu Aufgabe 2

X =Altersklasse (bis 50 Jahre, 51 Jahre oder älter)

Y =Besitz eines Computers (nein, ja)

Besitz eines Computers	Alter		Summe
	≤ 50	51+	
nein	860	961	1 821
	1 030,3	790,7	
ja	1 969	1 210	3 179
	1 798,7	1 380,3	
Summe	2 829	2 171	5 000

1. Der Test heißt Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest.

2. H_0 : Besitz eines Computers und Altersklasse sind stochastisch unabhängig

3. $df=1$

minimale erwartete Häufigkeit = $790,7 \geq 1$ okay

Keine Zelle hat eine erwartete Häufigkeit kleiner als fünf, maximal 20% aller Zellen wären hier erlaubt gewesen.

Die Faustregel ist erfüllt.

$$4. \chi_{\text{emp.}}^2 = \frac{(| 860 - 1 030,3 | -0,5)^2}{1 030,3} + \frac{(| 961 - 790,37 | -0,5)^2}{790,7} + \frac{(| 1 969 - 1 798,7 | -0,5)^2}{1 798,7} + \frac{(| 1 210 - 1 380,3 | -0,5)^2}{1 380,3} = 27,98412 + 36,46394 + 16,02938 + 20,88824 = 101,392$$

5. $\chi_{\text{emp.}}^2 = 101,392 > 3,841$

d.h. Ablehnung von H_0 ; d.h. der Besitz eines Computers und das Alter sind nicht stochastisch unabhängig.