Statistik-Aufgaben vom 02.02.2016

Aufgabe 1
Zwischen dem Absatz X und dem Verkaufspreis Y eines Produkts wird ein linearer Zusammenhang vermutet. Bei den letzten vier Preisveränderungen (in GE) ergaben sich folgende Absätze (in ME):

Absatz	Preis
25	4
21	5
20	7
16	8

a) Welcher Preis ist anzusetzen, um mit einen Absatz von 18 ME rechnen zu können?

b) Mit welchem Absatz ist zu rechnen, wenn der Preis auf 9 GE erhöht wird? Interpretieren Sie die Steigung der Regressionsgeraden, die zu dieser Prognose herangezogen wird.

c) Beurteilen Sie die Stärke des linearen Zusammenhangs anhand einer geeigneten Maßzahl.

d) Sind die Berechnungen unter den Teilaufgaben a) und b) aus statistischer Sicht zuverlässig? (Begründung!)

Aufgabe 2
Jeder Mitarbeiter des Qualitätsmanagements eines Automobilherstellers überprüft täglich 10 Neuwagen. Besteht ein Fahrzeug nicht die Qualitätskontrolle, so sind Nachbesserungen erforderlich. Das Bestehen oder Nicht-Bestehen der Qualitätskontrolle der einzelnen Fahrzeuge kann als stochastisch unabhängig voneinander angenommen werden.

Aus Erfahrung ist bekannt, dass 15% der Fahrzeuge des Modells A die Qualitätskontrolle nicht bestehen.

a) Wie viele untaugliche Fahrzeuge des Modells A entdeckt ein Mitarbeiter erwartungsgemäß

   1. pro Tag?
   2. pro Monat? Gehen Sie davon aus, dass ein Monat 22 Arbeitstage hat.

b) Wie viele Neuwagen von Modell A sortiert ein Mitarbeiter pro Monat mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens aus? Gehen Sie davon aus, dass ein Monat 22 Arbeitstage hat.

c) Aus Erfahrung ist bekannt, dass 25% der Fahrzeuge des Modells B die Qualitätskontrolle nicht bestehen.

   1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mitarbeiter an einem Tag höchstens bei zwei Neuwagen des Modells B Nachbesserungsbedarf feststellt?
   2. Ein Mitarbeiter der Qualitätskontrolle erzählt Ihnen, dass er gestern 10 Autos des gleichen Modells überprüft hat, von denen genau zwei defekt waren. Die Fahrzeuge eines welchen der beiden Modelle hat er gestern mit einer größeren Wahrscheinlichkeit überprüft?

Lösung zu Aufgabe 1

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
1	25	4			
2	21	5			
3	20	7			
4	16	8			
$\sum$	82	24	473	1 722	154

a) Gesucht $a_1 + b_1 \cdot 18 = ?$
$b_1 = \dfrac{4 \cdot 473 - 82 \cdot 24}{4 \cdot 1\,722 - 82^2} = \dfrac{-76}{164} = -0{,}4634146 \approx -0{,}46$
$a_1 = \dfrac{24 - (-0{,}46) \cdot 82}{4} = 15{,}43$
$15{,}43 - 0{,}46 \cdot 18 = 7{,}15$
d.h. es ist ein Preis von etwa 7 GE anzusetzen.

b) Gesucht $a_2 + b_2 \cdot 9 = ?$
$b_2 = \dfrac{-76}{4 \cdot 154 - 24^2} = \dfrac{-76}{40} = -1{,}9$
d.h. steigt der Preis um eine GE, so sinkt der Absatz um etwa 1,9 ME.
$a_2 = \dfrac{82 - (-1{,}9) \cdot 24}{4} = 31{,}9$
$31{,}9 - 1{,}9 \cdot 9 = 14{,}8 \approx 15$
d.h. es ist mit einem Absatz von etwa 15 ME zu rechnen.

c) $r = -\sqrt{(-0{,}46) \cdot (-1{,}9)} = -\sqrt{0{,}874} = -0{,}9348797 \approx -0{,}93$
d.h es liegt eine starke (negative) Korrelation vor.

d) Auf den Prognosewert aus Teilaufgabe a) ist Verlass, da es sich um einen interpolierten Wert ($18 \in [16; 25]$) bei gleichzeitig starker Korrelation handelt. Auf den Prognosewert aus Teilaufgabe b) ist kein Verlass, da es sich um einen extrapolierten Wert ($9 \notin [4; 8]$) handelt.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Es bezeichne X_A die Anzahl der defekten Autos pro Tag. Die Zufallsvariable X_A ist binomialverteilt mit Parametern n und $p = 0{,}15$.

1. $n = 10$
   Deshalb gilt
   $$E[X_A] = 10 \cdot 0{,}15 = 1{,}5.$$
   Also entdeckt ein Qualitätskontrolleur pro Tag erwartungsgemäß 1,5 defekte Neuwagen.
2. $n = 22 \cdot 10 = 220$
   $$E[X_A] = 220 \cdot 0{,}15 = 33$$
   Also entdeckt ein Qualitätskontrolleur pro Monat erwartungsgemäß 33 defekte Neuwagen.

b) Laut Aufgabenstellung ist danach gefragt, welche Anzahl von defekten Neuwagen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% überschritten wird, also ist das x gesucht, welches die Gleichung

$$0{,}95 = P(X_A \geq x) \Leftrightarrow 0{,}05 = P(X_A < x) = P(X_A \leq x - 1)$$

erfüllt. Pro Monat werden pro Mitarbeiter $n = 220$ Autos kontrolliert, von denen jedes einzelne weiterhin mit $p = 0{,}15$ durch die Qualitätskontrolle fällt. Wegen

$$n \cdot p = 33 \geq 10 \quad \text{und} \quad n \cdot (1-p) = 187 \geq 10$$

ist die Faustregel erfüllt, um die Binomial-/ Normalverteilungsapproximation zu verwenden. Folglich gilt

$$0{,}05 = P(X_A \leq x - 1) \approx F_U\left(\frac{x - 1 + 0{,}5 - 33}{\sqrt{220 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85}}\right) = F_U\left(\frac{x - 33{,}5}{\sqrt{28{,}05}}\right)$$

bzw.

$$-1{,}6449 = \frac{x - 33{,}5}{\sqrt{28{,}05}}.$$

Diese Gleichung impliziert $x \approx 33{,}5 - 1{,}6449 \cdot 5{,}296 \approx 24{,}79 \approx 25$. Also sortiert ein Mitarbeiter mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% pro Monat mindestens 25 Neuwagen des Modells A aus.

c) Es bezeichne X_B die Anzahl der defekten Wagen des Modells B pro Tag. Die Zufallsvariable X_B ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}25$.

1. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} P(X_B \leq 2) &= \binom{10}{0} 0{,}25^0 0{,}75^{10} + \binom{10}{1} 0{,}25^1 0{,}75^9 + \binom{10}{2} 0{,}25^2 0{,}75^8 \\ &\approx 0{,}0563 + 0{,}1877 + 0{,}2816 = 0{,}5256. \end{aligned}$$

   Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag höchstens 2 Neuwagen des Modells B defekt sind 52,56%.

2. Bereits in Aufgabenteil c.1) wurde die Wahrscheinlichkeit $P(X_B = 2) = 0{,}2816$ berechnet. Es gilt ferner

$$P(X_A = 2) = \binom{10}{2} 0{,}15^2 0{,}85^8 = 0{,}2759 < 0{,}2816 = P(X_B = 2).$$

   Deshalb hat der Kontrolleur mit einer größeren Wahrscheinlichkeit Fahrzeuge vom Modell B überprüft.