W-Statistik-Klausur 06.07.2016

Aufgabe 1
Auf einem Flughafen kann die Wartezeit zwischen zwei Anschlussflügen als normalverteilt mit dem Erwartungswert 120 Minuten und der Standardabweichung 60 Minuten angesehen werden.

a) Wie groß ist der Anteil der Anschlussflüge

1. mit höchstens 55 Minuten zum Umsteigen?
2. die genau 55 Minuten zum Umsteigen haben?
3. die mehr als 90 Minuten zum Umsteigen haben?

b) Mit welcher Umsteigezeit muss mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens gerechnet werden?

Aufgabe 2
In einer Studie soll die Preisentwicklung in der Telekommunikationsbranche untersucht werden. Konkret ist es das Ziel herauszufinden, wie sich die Kosten für die Handynutzung pro Monat seit 2012 entwickelt haben. Der monatliche Verbrauch und die monatlichen Kosten (in €) betrugen 2012 und 2016:

Art	Jahr	Verbrauch	Kosten
Grundgebühr	2012	1	20
Grundgebühr	2016	1	30
SMS	2012	100	0,1 / SMS
SMS	2016	5	0 / SMS
Internet	2012	20 MB	0,2 / MB
Internet	2016	500 MB	0,01 / MB

a) Berechnen Sie für den Zeitraum 2012 bis 2016

1. die Preisindizes nach Laspeyeres und Paasche! Welcher der beiden Preisindizes signalisiert eine größere gesamte Preisveränderung?
2. die durchschnittliche prozentuale Preissenkung pro Jahr laut dem Preisindex nach Paasche!

b)
1. Wie haben sich im Zeitraum 2012 bis 2016 die nominalen Ausgaben für die Handynutzung entwickelt?
2. Worauf sind die Unterschiede der Entwicklung der nominalen Ausgaben zu der Entwicklung der Preisindizes zurückzuführen?

c) Nehmen Sie an, dass im Jahr 2017 derselbe monatliche Verbrauch an Einheiten von Grundgebühr, SMS und Internet (MB) eintritt wie im Jahr 2016 und dass die monatlichen Preise für Grundgebühr und SMS konstant bleiben. Jedoch wird für das Jahr 2017 erwartet, dass den Telekommunikationsunternehmen durch Geschwindigkeitsverbesserungen der Internetverbindung Kosten entstehen, die diese direkt an den Kunden durch eine Preissteigerung im Bereich Internet auf x Euro pro MB weiter geben. Also:

Art	Jahr	Verbrauch	Kosten
Grundgebühr	2017	1	30
SMS	2017	5	0 / SMS
Internet	2017	500 MB	x / MB

Wie hoch müsste im Jahr 2017 der Preis x pro MB sein, damit für den Zeitraum 2012 bis 2017 der Preisindex nach Laspeyres keine Preisveränderung anzeigt?

Lösung zu Aufgabe 1:
X=Wartezeit (i Min) zwischen zwei Anschlussflügen
$X \sim \mathsf{N}(\mu = 120; \sigma = 60)$

a)
1. $P(X \leq 55) = F_U\left(\frac{55-120}{60}\right) = F_U(-1{,}0833) = 0{,}139$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,139.
2. $P(X = 55) = 0$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt null.
3. $P(X > 90) = 1 - F_U\left(\frac{90-120}{60}\right) = 1 - F_U(-0{,}5) = 1 - 0{,}309 = 0{,}691$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,691.

b) $0{,}95 = P(X \geq x) \Leftrightarrow 0{,}05 = P(X < x) = P(X \leq x) \Leftrightarrow -1{,}6449 = \frac{x-120}{60} \Leftrightarrow x = 120 - 1{,}6449 \cdot 60 = 21{,}306$
d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% muss mindestens mit einer Umsteigezeit von etwa 21 Minuten gerechnet werden.

Lösung zu Aufgabe 2:

a)
1. Der Preisindex nach Laspeyres verwendet die Mengen des Basisjahrs. Deshalb gilt:
   $P^{La}_{2012,2016} = \frac{1 \cdot 30 + 100 \cdot 0 + 20 \cdot 0{,}01}{1 \cdot 20 + 100 \cdot 0{,}1 + 20 \cdot 0{,}2} = \frac{30{,}2}{34} \approx 0,8882.$
   Der Preisindex nach Paasche verwendet die Mengen des Berichtjahrs. Damit folgt:
   $P^{Pa}_{2012,2016} = \frac{1 \cdot 30 + 5 \cdot 0 + 500 \cdot 0{,}01}{1 \cdot 20 + 5 \cdot 0{,}1 + 500 \cdot 0{,}2} = \frac{35}{120{,}5} \approx 0,2905.$
   Der Preisindex nach Paasche signalisiert also eine deutlich stärkere Preisveränderung.
2. Die durchschnittliche Preissenkung pro Jahr wird mit dem geometrischen Mittel berechnet:
   $\sqrt[2016-2012]{0,2905} = \sqrt[4]{0,2905} \approx 0,7342$. Dies bedeutet, dass die durchschnittliche Preissenkung pro Jahr seit 2012 etwa $26,58\%$ betragen hat.

b)
1. Die tatsächlichen Ausgaben haben sich von $1 \cdot 20 + 100 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0,2 = 34$ Euro im Jahr 2012 auf $1 \cdot 30 + 5 \cdot 0 + 500 \cdot 0,01 = 35$ Euro im Jahr 2016 gesteigert; d.h. $W = \frac{35}{34}$.
2. Die unterschiedliche Entwicklung im Vergleich zu den Preisindizes ist auf die großen Mengenveränderungen im Bereich Internet und SMS zurückzuführen.

c) Für den Preisindex nach Layspeyres gilt

$$1 = P^{La}_{2012,2017} = \frac{1 \cdot 30 + 100 \cdot 0 + 20 \cdot x}{1 \cdot 20 + 100 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0,2} = \frac{30 + 20x}{34}.$$

Damit dieser Ausdruck gleich 1 ist muss der Zähler gleich dem Nenner sein, also

$$30 + 20x = 34 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,2.$$

Der Preis pro MB müsste also auf $0,2$ ansteigen damit der Preisindex nach Laspeyres den Wert 1 annimmt und somit keine Preisveränderung im Vergleich zu 2012 anzeigt.

QM 2-Klausur 07.07.2016

Aufgabe 2
Zwischen dem Verkaufspreis (in Cent pro Stück) und dem Absatz (in ME pro Woche) von Teepackungen wird ein linearer Zusammenhang vermutet. Die Preise und die Absatzmengen der letzten vier Wochen lauten wie folgt:

Preis	Absatz	
139	60	
199	30	
149	50	
169	40	

a) In der kommenden Woche soll ein Absatz von 45 ME erzielt werden. Welcher Preis ist dazu gemäß einem linearen Regressionsmodell anzusetzen?

b) 1. Welcher Absatz ist bei einem Preis von 179 Cent pro Packung zu erwarten?
   2. Um wie viele ME sinkt der Absatz bei einer Preiserhöhung um einem Cent?

   Hinweis: Ziehen Sie für Ihre Berechnungen ein lineares Regressionsmodell heran.

c) Berechnen Sie die Korrelation zwischen Preis und Absatz. Interpretieren Sie das Vorzeichen und die Stärke der Korrelation.

d) Wie verlässlich ist der Prognosewert
   1. unter Teilaufgabe a)?
   2. unter Teilaufgabe b)?

   (Begründung!)

Lösung zu Aufgabe 2:
X=Absatzmenge
Y=Preis

y_i	x_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
139	60			
199	30			
149	50			
169	40			
656	180	28 520	8 600	109 684

a) $a_1 + b_1 \cdot 45 = ?$
$$b_1 = \frac{4 \cdot 28\,520 - 180 \cdot 656}{4 \cdot 8\,600 - 180^2} = \frac{-4\,000}{2\,000} = -2$$
$$a_1 = \frac{656 - (-2) \cdot 180}{4} = 254$$
$254 - 2 \cdot 45 = 164$
d.h. es ist ein Preis von 164 Cent anzusetzen.

b) 1. $a_2 + b_2 \cdot 179 =?$

$b_2 = \dfrac{-4\,000}{4 \cdot 109\,684 - 656^2} = -0{,}4761905$

$a_2 = \dfrac{180 - (-0{,}4761905) \cdot 656}{4} = 123{,}09524$

$123{,}09524 - 0{,}4761905 \cdot 179 = 37{,}85714 \approx 38$

d.h. es ist mit einem Absatz von 38 ME zu rechnen.

2. $b_2 = -0{,}4761905 \approx -0{,}5$

d.h. steigt der Preis um einen Cent, so sinkt der Absatz um etwa 0,5 ME.

c) $r = -\sqrt{(-2) \cdot (-0{,}4761905)} = -0{,}9759$

d.h. es besteht ein starker negativer linearer Zusammenhang zwischen Preis und Absatz.

d) 1. $45 \in [30; 60]$; d.h. 164 ist ein interpolierter Wert, auf den bei gleichzeitig starker Korrelation Verlass ist.

2. $179 \in [139; 199]$; d.h. 38 ist ein interpolierter Wert, auf den bei gleichzeitig starker Korrelation Verlass ist.

QM 3-Klausur 06.07.2016

Aufgabe 1
In Deutschland beantragen etwa sechs von 500 erwerbstätigen Vätern mit Kindern unter drei Jahren Elternzeit. Ein Unternehmen beschäftigt

a) zehn Väter mit Kindern unter drei Jahren. Mit welcher Anzahl von Vätern mit Kindern unter drei Jahren, die Elternzeit beantragen, muss das Unternehmen rechnen?

b) 20 Väter mit Kindern unter drei Jahren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Vater mit Kindern unter drei Jahren Elternzeit beantragt?

c) 900 Väter mit Kindern unter drei Jahren. Mit welcher Mindestanzahl von Vätern mit Kindern unter drei Jahren, die Elternzeit beantragen, muss das Unternehmen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% rechnen?

Aufgabe 2
Im Rahmen einer Werbemaßnahme für die 2. Fußball-Bundesliga soll auf die große Attraktivität ihrer Spiele hingewiesen werden. Als Beleg dafür soll die hohe Anzahl an Toren, die in ihren Spiel fallen, angeführt werden. Diese Aussage soll auch statistisch belegt werden. Dazu wird ein Vergleich mit der 1. Bundesliga für angebracht gehalten, in dem gezeigt werden soll, dass pro Spiel durchschnittlich mehr Tore in der 2. Bundesliga fallen als in der 1. Bundesliga.

Zur Beurteilung der statistischen Fragestellung kann auf die Daten der durchschnittlich pro Spiel gefallenen Tore aus insgesamt 34 Saisons zurückgegriffen werden.

Saison	Tore 2. Bundesliga	Tore 1. Bundesliga	Tore Differenz (2. Liga minus 1. Liga)
1	3,5327	3,0711	0,4616
2	3,3856	3,2079	0,1777
...	...	...	....
34	2,778	2,5844	0,1934
arithm. Mittel	2,9698	2,7882	0,1816

Die empirische Standardabweichung der Differenz der Tore beträgt $s \approx 0{,}1884$ Tore.

a) Prüfen Sie zunächst mit einem geeigneten zweiseitigen Test zum Niveau $\alpha = 0{,}05$, ob sich im Mittel die durchschnittlichen Tore pro Spiel in einer Saison in der 2. und 1. Liga unterscheiden.

b) Formulieren Sie mathematisch die für den beschriebenen einseitigen statistischen Test passende Nullhypothese H_0!

1. Beschreiben Sie in Worten, welche konkrete Bedeutung in diesem Fall der Fehler 1. Art hat!
2. Ist die Faustregel zum Durchführen des Tests erfüllt?
3. Zu welchem Ergebnis kommt dieser statistische Test, wenn das Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ beträgt? Interpretieren Sie in knappen Worten das Ergebnis!

Lösung zu Aufgabe 1:
X=Anzahl der Männer unter n erwerbstätigen Vätern mit Kindern unter drei Jahren, die Elternzeit beantragen
$X \sim \mathsf{B}(n; p = 0{,}012)$

a) $n = 10$
$E[X] = 10 \cdot 0{,}012 = 0{,}12$
d.h. im Mittel beantragen 0,12 Väter Elternzeit.

b) $n = 20$
$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{20}{0} 0{,}012^0 \cdot 0{,}988^{20} + \binom{20}{1} 0{,}012^1 \cdot 0{,}988^{19} = 0{,}785 + 0{,}191 = 0{,}976$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,976.

c) $n = 900$
Faustregel: $900 \cdot 0{,}012 = 10{,}8 \geq 10$ und $900 \cdot 0{,}988 = 889{,}2 \geq 10$ erfüllt
$0{,}95 = P(X \geq x) \Leftrightarrow 0{,}05 = P(X \leq x - 1) \Leftrightarrow -1{,}6449 \approx \dfrac{x - 1 + 0{,}5 - 10{,}8}{\sqrt{10{,}8 \cdot 0{,}988}}$
$x = 11{,}3 - 1{,}6449 \cdot \sqrt{10{,}6704} = 5{,}926839 \approx 6$
d.h. die mit der Wahrscheinlichkeit 0,95 zu erwartende Mindestanzahl beträgt etwa sechs Väter.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Es bezeichne X die Differenz der durchschnittlich pro Spiel gefallenen Tore der 2. Bundesliga minus der Tore der 1. Bundesliga in einer Saison.
Faustregel $n = 34 \geq 30$ erfüllt.
$H_0 : E[X] = 0$ versus $H_1 : E[X] \neq 0$
p-Wert $\sim 2 \cdot F_U\left(-\left|\frac{0{,}1816-0}{0{,}1884/\sqrt{34}}\right|\right) \approx 2 \cdot F_U(-5{,}62) \approx 0{,}000$. D.h. H_0 wird abgelehnt; d.h. es gibt im Mittel signifikante Unterschiede zwischen der durchschnittlichen Anzahl Tore pro Spiel in der 2. Liga und in der 1. Liga.

b) In der Stichprobe ist $\overline{x} = 0{,}1816 > 0$; d.h. $H_1 : E[X] > 0$. Dann lautet $H_0 : E[X] \leq 0$.

1. Der Fehler 1. Art bedeutet hier konkret, dass irrümlicherweise die Nullhypothese *Es fallen in der 1. Bundesliga genau so viele oder mehr Tore als in der 2. Bundesliga* für falsch gehalten wird, obwohl diese wahr ist D.h. der Test behauptet irrtümlicherweise, in der 2. Liga würden im Mittel mehr Tore geschossen als in der 1. Liga.
2. Aufgrund der gegebenen Datenlage ist der einseitige t-Test geeignet. Dieser darf angewendet werden, weil der Stichprobenumfang größer ist als 30.
3. Wir bestimmen zunächst den approximativen p-Wert des einseitigen t-Tests:
p-Wert $\approx \frac{0}{2} \approx 0$. D.h. die Nullhypothese wird abgelehnt, d.h. im Mittel fallen in der 2. Liga signifikant mehr Tore als in der 1. Liga.