Wirtschaftsstatistik-Klausur am 07.07.2015

Bearbeitungszeit: 45 Minuten

Aufgabe 1

In einem Flughafen wurde an einem Tag die Wartezeit (in Minuten) der Fluggäste vor der Gepäckaufgabe gemessen. In der nachfolgenden Tabelle wurde festgehalten, wie hoch der Anteil der wartenden Fluggäste war:

Wartezeit (in Min)	Anteil
0 bis 10	10%
über 10 bis 20	70%
über 20 bis 60	20%

a) Wie hoch ist in etwa der Anteil der Fluggäste, die mehr als 30 Minuten warten müssen?

b) Wie lange muss im Durchschnitt ein Fluggast warten, bis er sein Gepäck aufgeben kann?

c) Wie hoch ist die mediane Wartezeit eines Fluggastes?

d) Sind die durchschnittliche und die mediane Wartezeit eines Fluggastes unterschiedlich groß? Falls Ja, wieso unterscheiden sich diese beiden Kennzahlen?

Aufgabe 2

Laut einer Studie der Verkehrsbetriebe einer Stadt haben die öffentlichen Busse folgende Verspätungen:

Verspätung in Minuten:	0	5	10	20	30
Wahrscheinlichkeit	80 %	10%	6 %	3 %	1%

a) Wie hoch ist die erwartete Verspätung eines Busses?

b) Die (diskrete) Zufallsvariable X bezeichne die Verspätung (in Minuten) eines Busses. Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung der Zufallsvariablen X!

c) In der Stadt fahren täglich 100 Busse. Nehmen Sie an, dass die Verspätung der Busse stochastisch unabhängig ist.

1. Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Verspätungen pro Tag höchstens 150 Minuten beträgt?
2. Welche Summe von Verspätungen pro Tag wird mit einer Wahrscheinlichkeit von näherungsweise 95% überschritten?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 4 der nächsten 5 Busse pünktlich sind? Nehmen Sie weiterhin an, dass die Verspätungen stochastisch unabhängig sind.

Lösung zu Aufgabe 1:

X=Wartezeit eines Fluggastes in Minuten

$x_{j-1}^* < x \leq x_j^*$	n_j/n	x_j'	b_j	F
$0-10$	0,1	5	10	0,1
$10-20$	0,7	15	10	0,8
$20-60$	0,2	40	40	1,0

a) $F(30) \approx 0{,}8 + \dfrac{0{,}2}{40} \cdot (30 - 20) = 0{,}85$
$100\% - 85\% = 15\%$
d.h. ca. 15% der Fluggäste müssen länger als 30 Minuten warten.

b) $\overline{x} \approx 5 \cdot 0{,}1 + 15 \cdot 0{,}7 + 40 \cdot 0{,}2 = 19$
d.h. im Durchschnitt beträgt die Wartezeit eines Fluggastes etwa 19 Minuten.

c) $x_{0{,}50} \approx 10 + \dfrac{0{,}5 - 0{,}1}{0{,}7} \cdot 10 = 15{,}71429$; d.h. die mediane Wartezeit eines Fluggastes beträgt etwa 16 Minuten.

d) Nur für symmetrische Verteilungen sind die beiden Kennzahlen identisch. Da in diesem Datensatz die Fluggäste eher länger als kürzer warten, handelt es sich hier um eine schiefe, insb. nicht symmetrische, Verteilung. Deshalb sind die beiden Kennzahlen unterschiedlich groß.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Es gilt:
$$E[X] = 0 \cdot 0{,}8 + 5 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}06 + 20 \cdot 0{,}03 + 30 \cdot 0{,}01 = 2$$
Die erwartete Verspätung eines Busses beträgt 2 Minuten.

b) Die Varianz der Zufallsvariable X ist:
$$\begin{aligned} Var[X] &= (0-2)^2 \cdot 0{,}8 + (5-2)^2 \cdot 0{,}1 + (10-2)^2 \cdot 0{,}06 \\ &\quad + (20-2)^2 \cdot 0{,}03 + (30-2)^2 \cdot 0{,}01 \\ &= 25{,}5. \end{aligned}$$
Daher ist die Standardabweichung
$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{25{,}5} \approx 5{,}05.$$

c) Es bezeichne X_i die Zufallsvariable *Verspätung des i-ten Busses*.

1. In der Aufgabenstellung ist nach der Wahrscheinlichkeit:
$$P(X_1 + ... + X_{100} \leq 150)$$
gefragt. Dieser Ausdruck wird gemäß dem zentralen Grenzwertsatz approximiert. Die Faustregel $n = 100 \geq 30$ ist erfüllt.
$$\begin{aligned} P(X_1 + ... + X_{100} \leq 150) &\approx F_U\left(\frac{150 - 100 \cdot E[X]}{\sqrt{100 \cdot \sigma^2}}\right) \\ &= F_U\left(\frac{-50}{\sqrt{2550}}\right) \approx F_U(-0,9901) \approx 0,161 \end{aligned}$$
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich einem Tag die Verspätungen auf höchstens 150 Minuten, aufaddieren, beträgt etwa 16%. (D.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die durchschnittliche Verspätung eines Busses pro Tag höchstens 1,5 Minuten beträgt, liegt näherungsweise bei 16 %).

2. $0{,}05 = P(X_1 + \ldots + x_{100} \leq x) \Leftrightarrow -1{,}6449 = \dfrac{x - 100 \cdot 2}{\sqrt{100 \cdot 25{,}5}} \Leftrightarrow x = 116{,}9366$
   d.h. pro Tag ist mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 95% mit mindestens 117 Minuten eingefahrenen Verspätungen zu rechnen.

d) Ein Bus ist mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 pünktlich. Es liegt hier eine Binomialverteilung $B(5; 0{,}8)$ vor. Wir bezeichnen die zugehörige Zufallsvariable mit $Y =$ „Anzahl der Busse unter den 5 Bussen, die pünktlich sind“ und berechnen gemäß der Aufgabenstellung

$$\begin{aligned} P(Y \geq 4) &= P(Y = 4) + P(Y = 5) = \binom{5}{4} 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 + \binom{5}{5} 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^0 \\ &= 0{,}4096 + 0{,}32768 = 0{,}73728. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 4 der nächsten 5 Busse pünktlich sind, beträgt folglich 73,728%.