Wirtschaftsstatistik-Klausur 10.07.2013

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1
Bei einer Umfrage unter 5000 US-Bürgern bzgl. ihres Fernsehkonsums (in Stunden pro Woche) und ihres Rentnerstatus (nein, ja) ergaben sich folgende Daten (Angaben in Prozent):

TV-Konsum	Rentner	
Stunden/Woche	nein	ja
von 0 bis 17	29,6	37,6
über 17 bis 21	35,7	30,6
über 21 bis 36	34,7	31,8

a) Welche der beiden Gruppen (Rentner, Nicht-Rentner) sieht länger fern?

b) Wie viel Prozent der Nicht-Rentner sieht über 28 Stunden pro Woche fern?

c) Welcher TV-Konsum (in Stunden pro Woche) wird von 25% aller Rentner überschritten?

d) Wie stark schwankt der TV-Konsum von Rentern gemessen mit der Standardabweichung?

Aufgabe 2
Ein Unternehmen verwertet alte Elektrogeräte. Von besonderem Interesse sind dabei drei Metalle: Metall A, Metall B, Metall C. Aus Erfahrung ist bekannt, dass 40% der Elektrogeräte Metall A enthalten. Metall B kommt in 30% und Metall C in 10% der Elektrogeräte vor. Metall A und Metall B kommen in 10% der Geräte gemeinsam vor. Metall C kommt immer alleine vor.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt in einem zufällig ausgewählten Elektrogerät mindestens eines der beiden Metalle A,B vor?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt in einem zufällig ausgewählten Elektrogerät weder Metall B noch Metall C vor?

c) Sind die Ereignisse „ein zufällig ausgewähltes Elektrogerät enthält Metall A“ und „ein zufällig ausgewähltes Elektrogerät enthält Metall B“ stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der unterschiedlichen Metalle (aus der Menge der drei Metalle A,B und C), die ein zufällig ausgewähltes Elektrogerät enthält. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für alle Werte, die die Zufallsvariable X annehmen kann.

Aufgabe 3
Ein Unternehmen arbeitet zu Planungszwecken für die Werktage Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag und Freitag bezogen auf die Zufallsvariable X=„Anzahl der Kunden pro Werktag“ mit folgenden Wahrscheinlichkeiten:

Anzahl der Kunden pro Werktag	Wahrscheinlichkeit
0	0%
1	2%
2	8%
3	20%
4	30%
5	40%

Der Deckungsbeitrag pro Kunde beträgt 3 GE. Die Fixkosten betragen 8 GE pro Werktag.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen Y=„Gewinn (in GE) pro Werktag".

Die Gewinne der einzelnen Werktage seien stochastisch unabhängig voneinander und identisch verteilt (für jeden Werktag hat die Zufallsvariable Y aus Teilaufgabe a) die gleiche Verteilung). Damit sind die Voraussetzungen des Zentralen Grenzwertsatzes erfüllt. Verwenden Sie für die folgenden Berechnungen die Ergebnisse (Erwartungswert und Standardabweichung) aus Teilaufgabe a).

Hinweis: Sollten Sie Teilaufgabe a) nicht gelöst haben, so können Sie in den folgenden Teilaufgaben b), c), d) der Einfachheit halber für die Zufallsvariable Y als Erwartungswert 4 GE und als Standardabweichung 3 GE ansetzen.

b) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass der gesamte Gewinn der kommenden 260 Werktage höchstens 1 066 GE und mehr als 988 GE beträgt.

c) Welcher Wert wird vom gesamten Gewinn der kommenden 150 Werktage mit einer Wahrscheinlichkeit von näherungsweise 90% überschritten?

d) Bei welchen Werten von n beträgt das Verhältnis von Standardabweichung zum Erwartungswert der Zufallsvariablen „gesamter Gewinn (in GE) der kommenden n Werktage" maximal 5%?

Lösung zu Aufgabe 1
X=TV-Konsum in Stunden pro Woche eines Nicht-Rentners
Y=TV-Konsum in Stunden pro Woche eines Rentners

Klasse	n_j^X/n	n_j^Y/n	F^X	F^Y	b_j	x'_j	$\frac{n_j^X/n}{b_j}$	$\frac{n_j^Y/n}{b_j}$
von 0 bis 17	0,296	0,376	0,296	0,376	17	8,5	0,0174	0,0221
über 17 bis 21	0,357	0,306	0,653	0,682	4	19	0,0893	0,0765
über 21 bis 36	0,347	0,318	1,000	1,000	15	28,5	0,0231	0,0212
$\sum$	1	1						

a) *1. Lösungsweg:*
$\overline{x} \approx 8{,}5 \cdot 0{,}296 + 19 \cdot 0{,}357 + 28{,}5 \cdot 0{,}347 = 19{,}1885$
$\overline{y} \approx 8{,}5 \cdot 0{,}376 + 19 \cdot 0{,}306 + 28{,}5 \cdot 0{,}318 = 18{,}073$
d.h. gemessen mit dem arithmetischen Mittel ist der TV-Konsum von Rentnern geringer.

2. Lösungsweg:

$x_{0,50} \approx 17 + \dfrac{0{,}5 - 0{,}296}{0{,}357} \cdot 4 = 19{,}28571$

$y_{0,50} \approx 17 + \dfrac{0{,}5 - 0{,}376}{0{,}306} \cdot 4 = 18{,}62092$

d.h. gemessen mit dem Median ist der TV-Konsum von Rentnern geringer.

3. Lösungsweg:

$x_{\text{Modus}} = y_{\text{Modus}} = 19$

d.h. gemessen mit dem Modus gibt es keine Unterschiede in der Länge des TV-Konsums von Rentnern und Nicht-Rentnern.

b) $F^X(28) \approx 0{,}653 + \dfrac{0{,}347}{15} \cdot (28 - 21) = 0{,}8149333 \approx 0{,}815$

d.h. etwa 18,5% aller Befragten, die keine Rentner sind, sehen über 28 Stunden pro Woche fern.

c) $y_{0,75} \approx 21 + \dfrac{0{,}75 - 0{,}682}{0{,}318} \cdot 15 = 24{,}20755$

d.h. etwa 25% aller Rentner sehen pro Woche mehr als 24 Stunden fern.

d) $s_Y^2 \approx (8{,}5 - 18{,}073)^2 \cdot 0{,}376 + (19 - 18{,}073)^2 \cdot 0{,}306 + (28{,}5 - 18{,}073)^2 \cdot 0{,}318 = 69{,}29417$

$s_Y \approx \sqrt{69{,}29417} = 8{,}324312$

d.h. gemessen mit der Standardabweichung schwankt der TV-Konsum von Rentnern um etwa acht Stunden.

Lösung zu Aufgabe 2

A= ein zufällig ausgewähltes Elektrogerät enthält Metall A
B= ein zufällig ausgewähltes Elektrogerät enthält Metall B
C= ein zufällig ausgewähltes Elektrogerät enthält Metall C

$0{,}4 = P(A) \quad 0 = P(A \cap C)$
$0{,}3 = P(B) \quad 0 = P(B \cap C)$
$0{,}1 = P(C) \quad 0{,}1 = P(A \cap B)$

Arbeitstabellen:

	A	$\overline{A}$	
B	0,1	0,2	0,3
$\overline{B}$	0,3	0,4	0,7
	0,4	0,6	1

	B	$\overline{B}$	
C	0	0,1	0,1
$\overline{C}$	0,3	0,6	0,9
	0,3	0,7	1

	A	$\overline{A}$	
C	0	0,1	0,1
$\overline{C}$	0,4	0,5	0,9
	0,4	0,6	1

a) $P(A \cup B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,6.

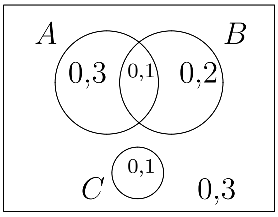
b) $P(\overline{B} \cap \overline{C}) = 0{,}6$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,6.

c) $P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 \neq 0{,}1 = P(A \cap B)$

d.h. A, B sind stochastisch abhängig.

d) X=Anzahl der verschiedenen Metalle in einem zufällig ausgewählten Gerät
X kann die Werte 0,1,2 annehmen.
Venndiagramm:



$P(X=0) = P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(C) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$
$P(X=1) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(C) = 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}6$
$P(X=2) = P(A \cap B) = 0{,}1$

Lösung zu Aufgabe 3

a) $Y = 3 \cdot X - 8$

x	1	2	3	4	5
y	-5	-2	1	4	7
$P(Y=y)$	0,02	0,08	0,20	0,30	0,40

$E[Y] = (-5) \cdot 0{,}02 + (-2) \cdot 0{,}08 + 1 \cdot 0{,}20 + 4 \cdot 0{,}30 + 7 \cdot 0{,}40 = 3{,}94$
$V[Y] = (-5-3{,}94)^2 \cdot 0{,}02 + (-2-3{,}94)^2 \cdot 0{,}08 + (1-3{,}94)^2 \cdot 0{,}20 + (4-3{,}94)^2 \cdot 0{,}30 + (7-3{,}94)^2 \cdot 0{,}40 = 9{,}8964$
$\sqrt{V[Y]} = \sqrt{9{,}8964} = 3{,}145854$

b) Der Einfachheit halber wird angenommen, dass gilt $E[Y] = 4$ GE und $\sqrt{V[Y]} = 3$ GE. Dann gilt für Die Summe: $Y_1 + \ldots + Y_n \approx \mathsf{N}(\mu = 4n; \sigma^2 = 9n)$
Faustregel für ZGWS $n = 260 \geq 30$ okay
$P(Y_1 + \ldots + Y_{260} \leq 1\,066) - P(Y_1 + \ldots + Y_{260} \leq 988) \approx F_U\left(\frac{1\,066 - 4 \cdot 260}{\sqrt{9 \cdot 260}}\right) - F_U\left(\frac{988 - 4 \cdot 260}{\sqrt{9 \cdot 260}}\right) = F_U(0{,}5375) - F_U(-1{,}0750) = 0{,}705 - 0{,}141 = 0{,}564$

c) Faustregel für ZGWS $n = 150 \geq 30$ okay
$0{,}10 \approx P(Y_1 + \ldots + Y_{150} \leq x) \Leftrightarrow -1{,}2816 \approx \frac{y - 4 \cdot 150}{\sqrt{9 \cdot 150}} \Leftrightarrow y = 600 - 1{,}2816 \cdot \sqrt{9 \cdot 150} = 552{,}911$
d.h. der gesuchte Wert beträgt etwa 553 GE.

d) $n = ?$
$\frac{\sqrt{9n}}{4n} \leq 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{9n}{16n^2} \leq 0{,}0025 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq 0{,}00\overline{4} \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{0{,}00\overline{4}} = 225$
d.h. n muss mindestens 225 betragen.