

Wirtschaftsstatistik-Klausur am 11.07.2014

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1 (33 Punkte)

Die Anzahl (in Millionen pro Tag) der verschickten SMS-Nachrichten in Deutschland von 2009 bis 2012 betragen:

Jahr	Anzahl	
2009	92	
2010	111	
2011	148	
2012	160	

- Mit wie vielen verschickten SMS-Nachrichten pro Tag ist gemäß der Methode der kleinsten Quadrate im Jahr 2013 zu rechnen?
- Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden unter a).
- Wie stark ist die Korrelation?
- Ist der unter Teilaufgabe a) berechnete Prognosewert aus statistischer Sicht verlässlich?

Aufgabe 2 (34 Punkte)

Die Fast-Food Kette **Green Queen** verkauft in den zwei Ländern *A* und *B* ihren beliebten Veggie Burger. Gemessen in den Geldeinheiten des jeweiligen Landes mussten in den Jahren 2009 bis 2013 die folgenden Preise für einen Burger bezahlt werden:

Jahr	Preise in GE	
	Land <i>A</i>	Land <i>B</i>
2009	98,0	1 000
2010	100,2	1 022
2011	104,3	1 040
2012	103,0	1 088
2013	107,8	1 092

- In welchem Land kam es im Zeitraum von 2009 bis 2013 zu einem stärkeren Preisanstieg des Veggie Burgers? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Berechnen Sie die durchschnittliche jährliche Preissteigerung in den Ländern *A* und *B* im Zeitraum von 2009 bis 2013.
- Für das Jahr 2014 wird im Land *A* ein Preisanstieg des Veggie Burgers um 2% eintreten und im Land *B* eine Preissenkung um 1%. Berechnen Sie die Veggie Burger Preise der beiden Länder für das Jahr 2014.
- Die Werte der obigen Tabelle werden auch als Veggie Burger Index der Länder *A* und *B* in den jeweiligen Jahren bezeichnet. Weil für den Veggie Burger in beiden

Ländern identische Zutaten verwendet werden, kann dieser als homogenes Gut angesehen werden. Bei einem perfekt funktionierenden Währungsmarkt muss der Wechselkurs der Währungen der beiden Länder deswegen genau dem Quotienten der beiden Indizes entsprechen. In welchem Verhältnis kann im Jahr 2010 und im Jahr 2012 die Währung von Land A gegen die Währung von Land B getauscht werden? In welchem der beiden Jahre 2010 und 2012 war der Wechselkurs höher?

Aufgabe 3 (33 Punkte)

In einem Versicherungsunternehmen sollen Rückstellungen für zukünftig zu zahlende Leistungen gebildet werden. Einer internen Analyse des Unternehmens können die möglichen Höhen der Leistungen (in GE) und ihre Wahrscheinlichkeiten entnommen werden.

Leistungen (in GE)	100	120	150	180	200	500
Wahrscheinlichkeit	8%	10%	40%	20%	16%	6%

Die Zufallsvariable X bezeichne die Höhe der zu zahlenden Leistungen.

- Es wird vorgeschlagen, Rückstellungen in Höhe der erwarteten zu zahlenden Leistungen $E[X]$ zu bilden. Wie hoch sind diese Rückstellungen?
- Welchen Wert (Median) müssen die Rückstellungen mindestens annehmen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% ausreichen?
- Die Versicherungsaufsicht verlangt, dass auch die Streuung der Zufallsvariable bei der Rückstellungsberechnung berücksichtigt werden muss. Berechnen Sie dazu die Standardabweichung σ_X !
- Schließlich beschließt das Versicherungsunternehmen, dass die Rückstellungen R nach folgender Formel gebildet werden sollen:

$$R = E[X] + 2 \cdot \frac{\sigma_X}{E[X]} \cdot (E[X] - \text{Median}).$$

Bestimmen Sie R . Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist R nicht ausreichend?

Lösung zu Aufgabe 1

$X = \text{Zeit}$

$Y = \text{Anzahl verschickter SMS in Millionen pro Tag}$

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
1	9	92	828	81	8 464
2	10	111	1 110	100	12 321
3	11	148	1 628	121	21 904
4	12	160	1 920	144	25 600
Σ	42	511	5 486	446	68 289

- a) Gesucht: $a_1 + b_1 \cdot 13 = ?$

$$b_1 = \frac{4 \cdot 5\,486 - 42 \cdot 511}{4 \cdot 446 - 42^2} = \frac{482}{20} = 24,1$$

$$a_1 = \frac{511 - 24,1 \cdot 42}{4} = -125,3$$

$$a_1 + b_1 \cdot 13 = 188$$

d.h. es ist mit etwa 188 Millionen SMS-Nachrichten pro Tag zu rechnen.

b) $b_1 = 24,1$ d.h. pro Jahr steigt die Anzahl der täglich verschickten SMS-Nachrichten um etwa 24 Millionen.

$$c) b_2 = \frac{482}{4 \cdot 68\,289 - 511^2} = \frac{482}{12\,035} = 0,04$$

$$r = \sqrt{b_1 \cdot b_2} \approx 0,98$$

d.h. es liegt eine starkre Korrelation vor.

d) Da $2013 \notin [x_{\min}; x_{\max}] = [2009; 2012]$ gilt, ist 188 ein extrapoliertes Wert, auf den aus statistischer Sicht kein Verlass ist.

Lösung zu Aufgabe 2:

$$a) \text{ Land A: } \frac{\text{Index}_{2013}}{\text{Index}_{2009}} = \frac{107,8}{98} = 1,100 \hat{=} + 10,0\%$$

$$\text{Land B: } \frac{\text{Index}_{2013}}{\text{Index}_{2009}} = \frac{1\,092}{1\,000} = 1,092 \hat{=} + 9,2\%$$

d.h. im Land A war der Preisanstieg höher.

$$b) \text{ Land A } \sqrt[2013-2009]{1,100} = \sqrt[4]{1,100} = 1,024$$

$$\text{Land B } \sqrt[2013-2009]{1,092} = \sqrt[4]{1,092} = 1,022$$

d.h. der durchschnittliche Preisanstige betrug im Land A etwa 2,4% und im Land etwa 2,2%.

$$c) \text{ Land A: } 107,8 \cdot 1,02 = 109,956$$

$$\text{Land B: } 1\,092 \cdot 0,99 = 1\,081,08$$

d.h. die gesuchten Werte betragen in Land A etwa 110,0 und in Land B etwas 1 081,1.

$$d) \text{ Jahr 2010: } 100,2A \hat{=} 1\,022B \Leftrightarrow 1A \hat{=} \frac{1\,022}{100,2} \approx 10,22$$

$$\text{Jahr 2012: } 103,0A \hat{=} 1\,088B \Leftrightarrow 1A \hat{=} \frac{1\,088}{103,0} \approx 10,56$$

d.h. im Jahr 2012 war der nominale Wechselkurs höher als im Jahr 2010.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Es gilt:

$$E[X] = 0,08 \cdot 100 + 0,1 \cdot 120 + 0,4 \cdot 150 + 0,2 \cdot 120 + 0,16 \cdot 200 + 0,06 \cdot 500 = 178$$

d.h. es müssen Rücklagen in Höhe von 178 GE gebildet werden.

b) Weil $F(120) = 0,18 < 0,5 < 0,58 = F(150)$ ist, gilt Median = 150 GE.

c) Die Varianz der Zufallsvariablen X ist:

$$\text{Var}[X] = (100 - 178)^2 \cdot 0,08 + (120 - 178)^2 \cdot 0,1 + (150 - 178)^2 \cdot 0,4 + (180 - 178)^2 \cdot 0,2 + (200 - 178)^2 \cdot 0,16 + (500 - 178)^2 \cdot 0,06 = 7\,436$$

Daraus folgt für die Standardabweichung $\sigma_X = \sqrt{7\,436} \approx 86,23$.

d) Durch Einsetzen ergibt sich:

$$R = 178 + 2 \cdot \frac{86,23}{178}(178 - 150) \approx 205,13.$$

d.h. die Rückstellungen reichen deshalb mit einer Wahrscheinlichkeit von 6% nicht aus, nämlich genau dann, wenn die zu zahlenden Leistungen 500 GE betragen.