Wirtschaftsstatistik-Klausur am 20.07.2017

Aufgabe 1

Ein Handy- und PC-Hersteller verfügt über ein exklusives Filialnetz von 900 Filialen. Der Gewinn (in GE) der Filialen ist in der folgenden Tabelle nach Klassen dargestellt:

Nr.	Gewinn	Anzahl der Filialen
1	0 bis 250 000	300
2	über 250 000 bis 500 000	400
3	über 500 000 bis 750 000	150
4	über 750 000 bis 1 000 000	50

a) Ermitteln Sie, welcher Gewinn von 60% der Filialen nicht überschritten wurde.

b) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und den Median des Gewinns und interpretieren Sie die Ergebnisse.

c) Berechnen Sie die Standardabweichung des Gewinns und interpretieren Sie diese.

d) In der Filiale mit dem größten Gewinn wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde ein Handy kauft, mit 25% beziffert. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde einen PC kauft, wird mit 15% angegeben. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde sowohl ein Handy als auch einen PC kauft, liegt bei 3,75%.

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Ein Kunde kauft nichts."
2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Ein Kunde kauft mindestens eines der beiden Produkte."
3. Prüfen Sie, ob der Kauf eines Handys und der Kauf eines PCs stochastisch unabhängig voneinander sind.

Aufgabe 2

In einem Land wird im Mittel eine von fünf Steuererklärungen falsch abgegeben. Ob eine Steuererklärung richtig ist, geschieht stochstastisch unabhängig von der Richtigkeit einer anderen Steuererklärung. Pro nicht korrekt ausgefüllter Steuererklärung fallen der Finanzbehörde zwei Geldeinheiten an Zusatzkosten an.

a) Mit welchen Zusatzkosten ist bei der Überprüfung von 500 Steuererklärungen zu rechnen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter zwanzig geprüften Steuererklärungen genau vier falsch ausgefüllte Erklärungen befinden?

c) Mit wie hohen Zusatzkosten ist bei einer Überprüfung von 10 000 Steuerklärungen mit der Wahrscheinlichkeit von 95% höchstens zu rechnen?

Lösung zu Aufgabe 1:

j	$x^*_{j-1} < x \leq x^*_j$	n_j	F	x'_j
1	$0 \leq x \leq 250\,000$	300	3/9	125 000
2	$250\,000 < x \leq 500\,000$	400	7/9	375 000
3	$500\,000 < x \leq 750\,000$	150	8,5/9	625 000
4	$750\,000 < x \leq 1\,000\,000$	50	1	875 000
$\sum$		$n = 900$	1	

a) $x_{0{,}60} \approx 250\,000 + \dfrac{0{,}6 - 3/9}{4/9} \cdot 250\,000 = 400\,000$

b) $\overline{x} \approx 125\,000 \cdot \dfrac{3}{9} + 375\,000 \cdot \dfrac{4}{9} + 625\,000 \cdot \dfrac{1{,}5}{9} + 875\,000 \cdot \dfrac{0{,}5}{9} = 361\,111{,}1 \approx 361\,111$
d.h. der durchschnittliche Gewinn pro Filiale beträgt etwa 361 111 GE.

$x_{0{,}50} \approx 250\,000 + \dfrac{0{,}5 - 3/9}{4/9} \cdot 250\,000 = 343\,750$

d.h. 50% aller Filialen machen einen Gewinn von etwa höchstens 343 750 GE.

c) $s^2 \approx (125\,000 - 361\,111{,}1)^2 \cdot \dfrac{3}{9} + (375\,000 - 361\,111{,}1)^2 \cdot \dfrac{4}{9} + (625\,000 - 361\,111{,}1)^2 \cdot \dfrac{1{,}5}{9} + (875\,000 - 361\,111{,}1)^2) \cdot \dfrac{0{,}5}{9} = 44\,945\,987\,654$

$s \approx \sqrt{44\,945\,987\,654} \approx 212\,004{,}69$
d.h. die Schwankungen des Datensatzes gemessen mit der Standardabweichung betragen in etwa 212 005 GE.

d) H= zufällig ausgewählter Kunde kauft ein Handy
PC=zufällig ausgewählter Kunde kauft einen PC

	H	$\overline{H}$	
PC	0,0375	0,1125	0,15
$\overline{PC}$	0,2125	0,6375	0,85
	0,25	0,75	1

1. $P(\overline{PC} \cap \overline{H}) = 0{,}6375$
2. $P(PC \cup H) = 1 - 0{,}6375 = 0{,}3625$
3. $P(PC) \cdot P(H) = 0{,}25 \cdot 0{,}15 = 0{,}0375 = P(PC \cap H)$
   d.h. PC und H sind stochastisch unabhängig voneinander.

Lösung zu Aufgabe 2:
X= Anzahl der falschen Steuererklärungen unter n geprüften
$X \sim \mathsf{BV}(n; p = 0{,}2)$

a) $n = 500$
$E[X] = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}2 = 100$
$100 \cdot 2 = 200$
d.h. es ist mit Zusatzkosten in Höhe von 200 Euro zu rechnen.

b) $n = 20$
$P(X = 4) = \binom{20}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{16} = 0{,}2181994$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 22%.

c) $n = 10\,000$
$E[X] = n \cdot p = 2\,000$ und $V[X] = np(1-p) = 1\,600$
Faustregel: $n \cdot p = 2\,000 > 10$ und $n \cdot (1-p) = 8\,000 > 10$ ist erfüllt
$0{,}95 = P(X \leq x) = F_U\left(\frac{x + 0{,}5 - 2\,000}{40}\right) \Leftrightarrow 1{,}6449 = \frac{x + 0{,}5 - 2\,000}{40} \Leftrightarrow x = 2\,065{,}296$
$2\,065{,}296 \cdot 2 = 4\,130{,}592$
d.h. mit der Wahrscheinlichkeit von 95% liegen die Zusatzkosten nicht über 4 130,59 Euro.

QM II Klausur am 19.07.2017

Aufgabe 2

a) Mit Hilfe eines linearen Regessionmodells soll der Jahresumsatz eines Handelsvertreters aufgrund seiner Berufserfahrung (in Jahren) vorhergesagt werden. Dazu stehen folgende Daten von fünf Handelsvertretern zur Verfügung:

Berufserfahrung in Jahren	Umsatz in 1 000 Euro	
1	80	
3	97	
6	103	
10	119	
11	117	

1. Mit welchem Jahresumsatz eines Handelsvertreters mit neun Jahren Berufserfahrung ist zu rechnen?
2. Interpretieren Sie die Steigung der Regressionsgeraden unter Teilaufgabe a.1).
3. Ist der in Teilaufgabe a.1) vorhergsagte Wert aus statistischer Sicht zuverlässig? (Begründung!)

b) Betrachten Sie die beiden Ereignisse “Berufserfahrung liegt über fünf Jahre“ und “Jahresumsatz liegt über dem Durchschnitt“. In einem Land haben 20% aller Handelsvertreter einen überdurchschnittlichen Jahresumsatz. Darüber hinaus haben 75% aller Handelsvertreter mit nicht überdurchschnittlichem Jahresumsatz höchstens fünf Jahre Berufserfahrung. Außerdem haben 50% aller Handelsvertreter mit überdurchschnittllichem Jahresumsatz über fünf Jahre Berufserfahrung.

1. Wie viel Prozent aller Handelsvertreter haben sowohl über fünf Jahre Berufserfahrung als auch einen überdurchschnittlichen Jahresumsatz?
2. Wie viel Prozent aller Handelsvertreter haben über fünf Jahre Berufserfahrung?

Lösung zu Aufgabe 2:

a) X = Berufserfahrung (in Jahren)
Y = Umsatz (in 1 000 Euro)

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	1	80	1	6 400	80
2	3	97	9	9 409	291
3	6	103	36	10 609	618
4	10	119	100	14 161	1 190
5	11	117	121	13 689	1 287
$\sum$	31	516	267	54 268	3 466

1. $a_1 + b_1 \cdot 9 = ?$

$b_1 = \dfrac{5 \cdot 3\,466 - 31 \cdot 516}{5 \cdot 267 - 31^2} = \dfrac{1\,334}{374} = 3{,}57$
$a_1 = \dfrac{516 - 3{,}57 \cdot 31}{5} = 81{,}07$
$81{,}07 + 3{,}57 \cdot 9 = 113{,}2$
d.h. es ist mit einem Jahresumsatz von etwa 113 000 Euro zu rechnen.

2. $b_1 = 3{,}57$ d.h. steigt die Berufserfahrung um ein Jahr, so steigt der Jahresumsatz um etwa 3 570 Euro.
3. $b_2 = \dfrac{1\,334}{5 \cdot 54\,268 - 516^2} = \dfrac{1\,334}{5\,084} = 0{,}26$
$r = \sqrt{3{,}57 \cdot 0{,}26} = \sqrt{0{,}9282} = 0{,}96$
$9 \in [x_{\text{min}}; x_{\text{max}}] = [1; 11]$; d.h. 113,2 ist ein interpolierter Wert, auf den Verlass ist, da die Korrelation stark ist.

b) B = über fünf Jahre Berufserfahrung
U= überdurchschnittlicher Jahresumsatz
$0{,}20 = P(U)$
$0{,}75 = P(\overline{B} \mid \overline{U}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{U})}{P(\overline{U})} = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{U})}{0{,}80} \Rightarrow P(\overline{B} \cap \overline{U}) = 0{,}75 \cdot 0{,}80 = 0{,}60$
$0{,}50 = P(B \mid U)) = \dfrac{P(B \cap U)}{P(U)} = \dfrac{P(B \cap U)}{0{,}20} \Rightarrow P(B \cap U) = 0{,}50 \cdot 0{,}20 = 0{,}10$
Arbeitstabelle:

	U	$\overline{U}$	$\sum$
B	0,10	0,20	0,30
$\overline{B}$	0,10	0,60	0,70
$\sum$	0,20	0,80	1

1. $P(B \cap U) = 0{,}10$
d.h. der Anteil beträgt 10%.
2. $P(B) = 0{,}30$
d.h. der Anteil beträgt 30%.

QM III Klausur am 20.07.2017

Aufgabe 1

a) Es ist bekannt, dass die Tagesrendite einer Aktie (Angabe in %) normalverteilt ist mit Erwartungswert 0,1% und Standardabweichung 0,7%.

   1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Tagesrendite dieser Aktie höher als 1,5% ist!
   2. Welcher konkrete Wert der Tagesrendite wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nicht unterschritten?
   3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Tagesrendite an drei Tagen genau zweimal höher als 1,5% ist, wenn die Tagesrenditen stochastisch unabhängig voneinander sind?

c) Die Tagesrendite einer weiteren Aktie sei ebenfalls normalverteilt und es sei ferner das zweifache Schwankungsintervall bekannt. Die untere Grenze dieses Intervalls ist gegeben durch $-1{,}9886$ und die obere Grenze durch 2,3886.
Bestimmen Sie aus diesen Angaben den Erwartungswert und die Varianz der Tagesrendite dieser zweiten Aktie!

Aufgabe 2

Streben Frauen und Männer in die gleichen Berufe? Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Niveau 0,05, ob der Ausbildungsbereich abhängt vom Geschlecht des Auszubildenden. Eine Umfrage unter den Auszubildenden in einer Stadt ergab folgende Werte:

Ausbildungsbereich	Frauen	Männer	
Industrie und Handel	60	40	
Handwerk	20	80	
öffentlicher Dienst	40	60	

Gehen Sie wie folgt vor:

a) Wie heißt der Test?

b) Wie lautet die Nullhypothese des Tests?

c) Überprüfen Sie, ob die Faustregel des Tests erfüllt ist.

d) Berechnen Sie den empirischen Wert der Teststatistik.

e) Wie lautet die Testentscheidung aufgrund der obigen Stichprobe? (Begründung!) Interpretieren Sie in knappen Worten das Ergebnis.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) X=Tagesrendite (in %)
$X \sim \mathsf{N}(\mu = 0{,}1; \sigma = 0{,}7)$

   1. $P(X > 1{,}5) = 1 - P(X \leq 1{,}5) = F_U\left(\dfrac{1{,}5 - 0{,}1}{0{,}7}\right) = 1 - F_U(2) = 1 - 0{,}977 = 0{,}023 =$ 2,3%

2. $0{,}01 = P(X \leq x) \Leftrightarrow -2{,}3263 = \dfrac{x - 0{,}1}{0{,}7} \Leftrightarrow x = 0{,}1 - 2{,}3263 \cdot 0{,}7 = -1{,}52841$
   d.h. die gesuchte Tagesrendite beträgt $-1{,}52841\%$.
3. Z = Anzahl der Tage, an denen die Rendite über 1,5% liegt
   $Z \sim \mathsf{B}(n = 3; p = 0{,}023)$
   $P(Z = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}023^2 \cdot 0{,}977 = 0{,}0016$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,0016.

b) Y=Tagesrendite (in %)
$Y \sim \mathsf{N}(\mu; \sigma)$
$[\mu - 2 \cdot \sigma; \mu + 2 \cdot \sigma] = [-1{,}9886; +2{,}3886]$
1. Lösungsweg:

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & -1{,}9886 & = & \mu - 2 \cdot \sigma \\
\text{II} & 2{,}3886 & = & \mu + 2 \cdot \sigma \\
\hline
\text{II} - \text{I} & 4{,}3772 & = & 4 \cdot \sigma \Leftrightarrow \sigma = 1{,}0943 \Leftrightarrow \sigma^2 = 1{,}0943^2 = 1{,}1975 \\
\text{I} & -1{,}9886 & = & \mu - 2 \cdot 1{,}0943 \Leftrightarrow \mu = 2 \cdot 1{,}0943 - 1{,}9886 = 0{,}2
\end{array}$$

2. Lösungsweg:
μ=Intervallmitte = (Untergrenze + Obergrenze) $\div$ 2 = $(-1{,}9886 + 2{,}3886) \div 2 = 0{,}2$
Intervallänge = Obergrenze minus Untergrenze = $4 \cdot \sigma = 2{,}3886 - (-1{,}9886) = 4{,}3772 \Leftrightarrow$ $\sigma = \frac{4{,}3772}{4} = 1{,}0943 \Leftrightarrow \sigma^2 = 1{,}0943^2 = 1{,}1975$

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest

b) H_0: Ausbildungsbereich und Geschlecht sind stochastisch unabhängig

c) Erwartete Häufigkeiten:

Ausbildungsbereich	Frauen	Männer	
Industrie und Handel	40	60	100
Handwerk	40	60	100
öffentlicher Dienst	40	60	100
	120	180	300

Die minimale erwartete Häufigkeit beträgt 40 und ist größergleich eins. Außerdem hat keine Zelle eine erwartete Häufigkeit kleiner als fünf, erlaubt wären hier bis zu 20% aller Zellen. Also ist die Faustregel erfüllt.

d) Der empirische Wert der Teststatistik beträgt:

$$T\text{emp.} = \frac{(60-40)^2}{40} + \frac{(40-60)^2}{60} + \frac{(20-40)^2}{40} + \frac{(80-60)^2}{60} + \frac{(40-40)^2}{40} + \frac{(60-60)^2}{60} = 33{,}\overline{3}$$

e) Der obere 5%-Punkt der Chi-Quadrat-Verteilung mit zwei Freiheitsgraden beträgt 5,991. Da gilt: $33{,}\overline{3} > 5{,}991$ wird H_0 abgelehnt; d.h. der Ausbildungsbereich hängt ab vom Geschlecht.