Wirtschaftsstatistik-Klausur am 25.01.2017

Aufgabe 1
Ein Pharmaunternehmen möchte die Effizienz der eigenen Forschungsaktivität evaluieren. Das Unternehmen möchte dabei die Kosten für Forschung und Entwicklung (F&E-Ausgaben) dem Nutzen der Ausgaben gegenüberstellen. Der Nutzen der Ausgaben soll über die in einem Jahr zugelassenen Patente gemessen werden. Eine Übersicht der F&E-Ausgaben sowie der zugelassenen Patente der letzten fünf Jahre ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

Jahr	F&E-Ausgaben (in Mio. Euro)	Angemeldete Patente
2011	100	5
2012	120	4
2013	160	7
2014	140	7
2015	190	9

a) Bestimmen Sie Durchschnittswert und Median sowie Standardabweichung der F&E-Ausgaben und interpretieren Sie die berechneten Werte.

b) Quantifizieren Sie die Stärke des linearen Zusammenhangs zwischen F&E-Ausgaben und Patentanmeldungen durch ein geeignetes Maß und interpretieren Sie die von Ihnen ermittelte Maßzahl.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate, wie viele Patentanmeldungen zu erwarten sind, wenn das Unternehmen 154 Mio. Euro für F&E ausgibt. Erläutern Sie, ob der erwartete Wert zuverlässig ist.

d) Bestimmen Sie anhand der Regressionsgeraden, wie viele Patentanmeldungen weniger zu erwarten sind, wenn die F&E-Ausgaben

   1. um eine Mio. Euro gesenkt werden.
   2. um 20 Mio. Euro gesenkt werden.

Aufgabe 2
In einer Stadt gibt es nur schwarze und weiße Autos, und zwar sind 90% der Wagen schwarz und 10% der Wagen weiß.

a) In der Stadt ist ein Verkehrsunfall geschehen. Der Fahrer, der den Unfall verursacht hat, hat Fahrerflucht begangen. Ein Zeuge hat den Unfall beobachtet. Ein Test ergab, dass der Zeuge in 80% der Fälle weiße Autos richtig in Erinnerung behält und in 85% der Fälle schwarze Autos richtig in Erinnerung behält.

   1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit behält der Zeuge bei dem Test die Farbe eines Autos richtig in Erinnerung?
   2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist bei dem Test die Autofarbe schwarz und der Zeuge sagt, dass sie weiß ist?

3. Der Zeuge ist sich sicher, dass der Wagen des Unfallverursachers weiß ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto des Unfallverursachers tatsächlich weiß ist?
4. Wie lässt sich das Ergebnis aus Teilaufgabe a.3) in Anbetracht der Tatsache erklären, dass der Zeuge laut Teilaufgabe a.1) in über 80% der Fälle die Farbe richtig identifiziert?

b) In der Stadt sind in einem Monat 10 Unfälle (ohne Beobachtung durch den Zeugen) geschehen. Insgesamt waren 20 Autos in die Unfälle involviert. Nehmen Sie an, dass die Unfälle stochastisch unabhängig von der Farbe der Autos passieren.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit waren 18 oder mehr schwarze Wagen an den Unfällen beteiligt?
2. Wie groß ist die erwartete Anzahl von weißen Autos, die an den Unfällen involviert waren?

Lösung zu Aufgabe 1:
X=F&E-Ausgaben
Y=Anzahl der angemeldeten Patente
Um die kumulierten relativen Häufigkeiten der x-Werte berechnen zu können, müssen die x-Werte aufsteigend geordnet werden:

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$	n_i^x	n_i^x/n	$F(x_i)$
1	100	5	10 000	25	500	1	1/5	0,2
2	120	4	14 400	16	480	1	1/5	0,4
3	140	7	19 600	49	980	1	1/5	0,6
4	160	7	25 600	49	1 120	1	1/5	0,8
5	190	9	36 100	81	1 710	1	1/5	1
$\sum$	710	32	105 700	220	4 790	$n = 5$	1	

a) Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{1}{5} \cdot 710 = 142$
Die F&E-Ausgaben lagen im Durchschnitt bei 142 Mio. Euro.
Median: $x_{0,50} \approx 140$ Die F&E-Ausgaben lagen in mindestens 50% der Fälle höchstens bei einem Wert von 140 Mio. Euro. Oder: Die medianen Ausgaben betrugen in etwa 140 Mio. Euro.
Standardabweichung: $s_x = \sqrt{\left(\frac{1}{5} \cdot 105\,700\right) - 142^2} = \sqrt{976} \approx 31{,}241$
Die Schwankungen der F&E-Ausgaben gemessen mit der Standardabweichung liegen bei 31,241 Mio. Euro.

b) *1. Lösungsweg:*
$b_1 = \dfrac{5 \cdot 4\,790 - 710 \cdot 32}{5 \cdot 105\,700 - 710^2} = \dfrac{1\,230}{24\,400} = 0{,}0504$
$b_2 = \dfrac{1\,230}{5 \cdot 220 - 32^2} = \dfrac{1\,230}{76} = 16{,}1842$
$r = \sqrt{16{,}1842 \cdot 0{,}0504} = \sqrt{0{,}8157} = 0{,}903$
d.h. es liegt ein positiver starker linearer Zusammenhang zwischen den Ausgaben und den angemeldeten Patenten vor.
2. Lösungsweg:

$B = 16{,}1842 \cdot 0{,}0504 = 0{,}816$
d.h. es liegt ein positiver starker linearer Zusammenhang zwischen den Ausgaben und den angemeldeten Patenten vor.

c) $a_1 + b_1 \cdot 154 = ?$
$a_1 = \dfrac{32 - 0{,}0504 \cdot 710}{5} = -0{,}7568$
$-0{,}7568 + 0{,}0504 \cdot 154 = 7{,}0048 \approx 7$
d.h. es ist mit sieben angemeldeten Patenten zu rechnen.
Der Prognosewert 7 Patente ist zuverlässig, da $154 \in [100; 190]$ und die Korrelation stark ist.

d)
1. $b_1 = 0{,}0504$ d.h. werden die Ausgaben um eine Mio. Euro gesenkt, so sinkt die Anzahl der angemeldeten Patenten um 0,0504 Patente.
2. $b_1 \cdot 20 = 0{,}0504 \cdot 20 = 1{,}008$ d.h. werden die Ausgaben um 20 Mio. Euro gesenkt, so wird ein Patent weniger angemeldet.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) *1. Lösungsweg:*
S = tatsächliche Autofarbe ist schwarz
$\overline{S}$ = tatsächliche Autofarbe ist weiß
Z = Autofarbe gemäß Angabe des Zeugen ist schwarz
$\overline{Z}$ = Autofarbe gemäß Angabe des Zeugen ist weiß
$0{,}90 = P(S)$
$0{,}10 = P(\overline{S})$
$0{,}80 = P(\overline{Z} \mid \overline{S}) \Rightarrow P(\overline{Z} \cap \overline{S}) = 0{,}80 \cdot 0{,}10 = 0{,}08$
$0{,}85 = P(Z \mid S) \Rightarrow P(Z \cap S) = 0{,}85 \cdot 0{,}90 = 0{,}765$
Arbeitstabelle:

	S	$\overline{S}$	$\sum$
Z	0,765	0,020	0,785
$\overline{Z}$	0,135	0,080	0,215
$\sum$	0,90	0,10	1

1. $P(Z \cap S) + P(\overline{Z} \cap \overline{S}) = 0{,}765 + 0{,}080 = 0{,}845$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 84,5 %.
2. $P(S \cap \overline{Z}) = 0{,}135$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 13,5 %.
3. $P(\overline{S} \mid \overline{Z}) = \dfrac{0{,}080}{0{,}215} \approx 0{,}372$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 37,2 %.
4. Das liegt daran, dass nur 10% der Autos tatsächlich weiß sind. (Wären z.B. 20% aller Autos weiß, so wäre $P(\overline{S} \cap \overline{Z}) + P(S \cap Z) = 0{,}16 + 0{,}68 = 0{,}84$, also immer noch über 80%, aber die Fehleinschätzung $P(\overline{S} \mid Z) = \dfrac{0{,}04}{0{,}72} \approx 0{,}0\overline{5}$ mit 6% schon wesentlich kleiner und die korrekte Einschätzung $P(\overline{S} \mid \overline{Z}) = \frac{0{,}16}{0{,}28} \approx 0{,}57$ schon wesentlich größer.)

2. Lösungsweg:
T = tatsächliche Autofarbe (s=schwarz, w=weiß)
Z = Autofarbe gemäß Angabe des Zeugen (s = schwarz, w = weiß)
$0{,}90 = P(T = s)$
$0{,}10 = P(T = w)$
$0{,}80 = P(Z = w \mid T = w) \Rightarrow P(T = w \cap Z = w) = 0{,}80 \cdot 0{,}10 = 0{,}08$
$0{,}85 = P(Z = s \mid T = s) \Rightarrow P(T = s \cap Z = s) = 0{,}85 \cdot 0{,}90 = 0{,}765$
Arbeitstabelle:

Z	T		
	s	w	$\sum$
s	0,765	0,020	0,785
w	0,135	0,080	0,215
$\sum$	0,90	0,10	1

1. $P(T = w \cap Z = w) + P(T = s \cap Z = s) = 0{,}765 + 0{,}080 = 0{,}845$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 84,5 %.
2. $P(T = s \cap Z = w) = 0{,}135$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 13,5 %.
3. $P(T = w \mid Z = w) = \dfrac{0{,}080}{0{,}215} \approx 0{,}372$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 37,2 %.
4. Das liegt daran, dass nur 10% der Autos tatsächlich weiß sind. (Wären z.B. 20% aller Autos weiß, so wäre $P(T = w \cap Z = w) + P(T = s \cap Z = s) = 0{,}16 + 0{,}68 = 0{,}84$, also immer noch über 80%, aber $P(T = w \mid Z = s) = \dfrac{0{,}04}{0{,}72} \approx 0{,}0\overline{5}$ mit 6% schon wesentlich kleiner.)

b) X = Anzahl der schwarzen Autos unter den 20 Unfallwagen
$X \sim B(n = 20; p = 0{,}9)$

1. $P(X \geq 18) = P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) = \binom{20}{18} \cdot 0{,}9^{18} \cdot 0{,}1^2 + \binom{20}{19} \cdot 0{,}9^{19} \cdot 0{,}1^1 + \binom{20}{20} \cdot 0{,}9^{20} \cdot 0{,}1^0 = 0{,}2852 + 0{,}2702 + 0{,}1216 = 0{,}6770$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,677 bzw. 67,7%.
2. $E[X] = 20 \cdot 0{,}9 = 18$ und $n - 18 = 20 - 18 = 2$
   d.h. die erwartete Anzahl an weißen Unfallautos beträgt zwei.

QM II Klausur am 24.01.2017

Aufgabe 2
Ein Bauunternehmen unterteilt seine Projekte in eine Entwurfs- und eine Konstruktionsphase. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Entwurfsphase eines Projekts in der veranschlagten Zeit fertig gestellt wird, beläuft sich auf 60%. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Konstruktionsphase eines Projekts in der geplanten Zeit fertiggestellt wird, gegeben dass die Entwurfsphase in der Zeit fertig geworden ist, beläuft sich auf 70%. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Projekt sowohl die Entwurfs- als auch die Konstruktionsphase nicht in der Zeit fertiggestellt werden, beläuft sich auf 20%.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem zufälligen Projekt:

   1. die Entwurfsphase zwar in der Zeit, aber die Konstruktionsphase nicht in der Zeit fertiggestellt werden.
   2. die Konstruktion in der Zeit fertig gestellt wird.
   3. die Entwurfsphase nicht in der veranschlagten Zeit fertiggestellt wird, gegeben dass die Konstruktionsphase in der Zeit fertiggestellt wurde.

b) Sind die Ereignisse „Fertigstellung der Entwurfsphase in der veranschlagten Zeit“ und „Fertigstellung der Konstruktionsphase in der veranschlagten Zeit“ stochastisch unabhängig?

c) Die theoretische Verteilungsfunktion für die Dauer X (in Monaten) der Konstruktionsphase der Projekte ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

x=Dauer in Monaten	Verteilungsfunktion $P(X \leq x)$
6	0,1
7	0,5
8	0,7
9	0,8
10	1,0

Bestimmen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der Konstruktionsphase und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Lösung zu Aufgabe 2
E = Entwurfsphase termingerecht abgeschlossen
K = Konstruktionsphase termingerecht abgeschlossen

$0{,}60 = P(E)$
$0{,}70 = P(K \mid E) \Rightarrow P(E \cap K) = 0{,}70 \cdot 0{,}60 = 0{,}42$
$0{,}20 = P(\overline{E} \cap \overline{K})$

	E	$\overline{E}$	
K	0,42	0,20	0,62
$\overline{K}$	0,18	0,20	0,38
	0,60	0,40	1

a)
1. $P\left(E \cap \bar{K}\right) = 0{,}18$
2. $P\left(K\right) = 0{,}62$
3. $P\left(\overline{E}|K\right) = \dfrac{0{,}2}{0{,}62} \approx 0{,}32$

b) $P(E) \cdot P(K) = 0{,}6 \cdot 0{,}62 = 0{,}372 \neq 0{,}42 = P(E \cap K)$
d.h. die Ereignisse sind stochastisch abhängig.

c)

x	6	7	8	9	10
$P(X=x)$	0,1	0,4	0,2	0,1	0,2

$E[X] = 6 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}4 + 8 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}2 = 7{,}9$
$Var[X] = 6^2 \cdot 0{,}1 + 7^2 \cdot 0{,}4 + 8^2 \cdot 0{,}2 + 9^2 \cdot 0{,}1 + 10^2 \cdot 0{,}2 - 7{,}9^2 = 64{,}1 - 62{,}41 = 1{,}69$
$\sqrt{Var[X]} = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3$
Es ist zu erwarten, dass die Konstruktionsphase eines zufälligen Projekts 7,9 Monate dauert. Die Schwankung gemessen mit der Standardabweichung für die Dauer der Konstruktionsphase beläuft sich auf 1,3 Monate.

QM III Klausur am 25.01.2017

Aufgabe 1
Betrachten Sie die Veränderung in Prozent der Arbeitslosenquote gegenüber der Vorwoche in einem Land.

a) In der nachfolgenden Tabelle sind die ersten sieben Veränderungen der Quote gegenüber der Vorwoche eines Jahres angegeben:

Kalenderwoche	1	2	3	4	5	6	7
Veränderung	$+12\%$	$+13\%$	-12%	$+11\%$	-10%	$+20\%$	-10%

Um wie viel Prozent hat sich die Arbeitslosenquote im Zeitraum 4. Kalenderwoche bis 7. Kalenderwoche durchschnittlich pro Woche verändert?

b) Gesucht ist ein 0,94-Konfidenzintervall für den Anteil der Wochen, in denen die Arbeitslosenquote gesunken ist. In den letzten zwei Jahren betrug die wöchentliche Veränderung (in %) der Quote gegenüber der Vorwoche:

14	−19	−8	−16	34	14	14	−13	14	10
5	8	2	−8	9	14	14	2	−7	7
−8	7	−1	−11	3	17	−11	3	8	5
4	1	17	−10	−5	22	20	5	4	17
8	4	3	4	−17	−5	18	10	16	7
7	−4	−3	3	16	−4	−5	9	12	3
5	4	−2	−6	3	−1	−13	6	9	2
22	1	6	16	9	12	−10	18	−4	5
7	1	8	5	−8	4	7	−3	5	2
7	8	12	16	6	−7	3	−4	−8	1
4	20	11	−5						

Berechnen Sie aus der Stichprobe mit $n = 104$ Wochen das gesuchte Konfidenzintervall und interpretieren Sie das Intervall.

c) Nehmen Sie an, dass für das kommende Quartal die Anzahl der Wochen, in denen die Arbeitslosenquote sinkt, binomialverteilt ist mit $p = 0{,}25$ und $n = 13$ Wochen.

1. An wie vielen Wochen ist zu erwarten, dass die Quote sinkt?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es im kommenden Quartal genau sechsmal zu einer Senkung der wöchentlichen Quote kommt?

Aufgabe 2
Das Jahreseinkommen (in Euro) eines Einwohners eines Landes sei normalverteilt mit der Standardabweichung 8 000 Euro. Die Präsidentin dieses Landes behauptet im Wahlkampf: „Unsere politischen Maßnahmen haben dazu geführt, dass das Jahresdurchschnittseinkommen in unserem Land mittlerweile 35 000 Euro beträgt."

a) 1. Formulieren Sie die Aussage der Präsidentin als Nullhypothese und stellen Sie die zugehörige Gegenhypothese auf.

2. Welcher statistische Test ist grundsätzlich geeignet, um die Aussage zu belegen oder widerlegen?
3. Was sind die Voraussetzungen, um diesen Test anwenden zu können?

b) Unter 500 Einwohnern des Landes wird daraufhin von der Opposition eine Umfrage durchgeführt, die ein Jahresdurchschnittseinkommen von nur 34 000 Euro ausweist.

1. Kann der Präsidentin auf Grundlage des von Ihnen unter Teilaufgabe a) genannten statistischen Tests zum Signifikanzniveau 0,05 vorgeworfen werden, die Fakten zu verdrehen?
2. Beschreiben Sie in Worten, für welche Signifikanzniveaus die Entscheidung des statistischen Tests dieselbe bleibt wie in Teilaufgabe b.1).
3. Begründen Sie hiervon ausgehend, wie Sie die Aussagekraft Ihres Ergebnisses aus Teilaufgabe b.1) einordnen.
4. Verwenden Sie, falls möglich, einen weiteren statistischen Test zum Signifikanzniveau 0,05, um nachzuweisen, in welche Richtung eine Abweichung von der Aussage der Präsidentin zu beobachten ist. Falls die Anwendung eines solchen statistischen Tests hier nicht sinnvoll ist, begründen Sie, weshalb das so ist.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) *1. Lösungsweg* (geometrisches Mittel aus den Faktoren):
Faktor = Rate + 1

Zeitraum 4. Woche bis 7. Woche = drei wöchentliche Veränderungen
Faktor $= \sqrt[7-4]{0{,}9 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}9} = \sqrt[3]{0{,}972} = 0{,}9905782$

Rate = Faktor − 1 = 0,9905782 − 1 = −0,0094218 ≈ −0,009
d.h. im Zeitraum 4. bis 7. Kalenderwoche ist die Quote um durchschnittlich 0,9 % pro Woche gesunken.
2. Lösungsweg:
Annahme: Die Quote beträgt in der 4. Kalenderwoche 10%:

Woche	Quote
4	10%
5	$10 \cdot 0{,}9 = 9\%$
6	$9 \cdot 1{,}2 = 10{,}8\%$
7	$10{,}8 \cdot 0{,}9 = 9{,}72\%$

Faktor$= \sqrt[7-4]{\dfrac{\text{Quote}_{\text{7. Woche}}}{\text{Quote}_{\text{4. Woche}}}} = \sqrt[3]{\dfrac{9{,}72}{10}} = 0{,}9905782$

Rate = Faktor − 1 = 0,9905782 − 1 = −0,0094218 ≈ −0,009 $\widehat{=}$ − 0,9%

b) p=Anteil der Wochen, an denen die Quote sinkt.
30-mal ist in der Stichprobe die Veränderung negativ, also $\widehat{p} = \dfrac{30}{104}$
Faustregel $n = 104 \geq 100$ ist erfüllt.
Der 97%-Punkt der Standard-Normalverteilung beträgt 1,8808.

Somit ergibt sich das KI für p wie folgt:

$$\frac{30}{104} \pm 1{,}8808 \cdot \sqrt{\frac{\frac{30}{104} \cdot \frac{74}{104}}{104}} = [0{,}2049072; 0{,}3720159] \approx [0{,}20; 0{,}37]$$

d.h. [20%;37%] ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem p mit einer Wahrscheinlichkeit von 94% liegt.

c) $X =$ Anzahl der Wochen, in denen die Quote sinkt.
$X \sim \mathsf{B}(n = 13; p = 0{,}25)$

1. $E[X] = 13 \cdot 0{,}25 = 3{,}25$
   d.h. es ist zu erwarten, dass im kommenden Quartal die Quote an etwa drei der dreizehn Wochen sinkt.
2. $P(X = 6) = \binom{13}{6} \cdot 0{,}25^6 \cdot 0{,}75^7 = 0{,}0559$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,0559

Lösung zu Aufgabe 2:
Die Zufallsvariable X beschreibe das Jahreseinkommen (in Euro) eines Einwohners des Staates. Nach Angabe gilt, dass $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma = 8\,000)$.

a)
1. Die Aussage der Präsidentin mündet in das Testproblem:
   $$H_0 : E[X] = 35\,000 \text{ gegen } H_1 : E[X] \neq 35\,000.$$
2. Es sollte der (zweiseitige) Gaußtest durchgeführt werden.
3. Weil es sich um eine normalverteilte Zufallsvariable mit bekannter (theoretischer) Varianz handelt, sind die Voraussetzungen für den Gaußtest erfüllt.

b)
1. Wir berechnen den p-Wert:
   $$2 \cdot F_U\left(-\left|\frac{34\,000 - 35\,000}{8\,000/\sqrt{500}}\right|\right) \approx 2 \cdot F_U(-2{,}7951) \approx 2 \cdot 0{,}003 = 0{,}006.$$
   Weil der p-Wert kleiner als das Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ ist, wird die Nullhypothese abgelehnt. Das heißt, dass der Präsidentin zum Signifikanzniveau 0,05 zurecht vorgeworfen werden kann, die Tatsachen zu verdrehen.
2. Die Nullhypothese wird anhand dieser Stichprobe für alle Signifikanzniveaus $\alpha \geq 0{,}006$ abgelehnt.
3. *1. Lösungsweg:*
   Je kleiner der p-Wert ist, desto unplausibler ist H_0.
   2. Lösungsweg:
   Für einen p-Wert $\leq 0{,}01$ wird von einem hoch-signifikanten Ergebnis des Tests gesprochen, so dass wir mit großer Sicherheit auf das Ergebnis auf Teilaufgabe b.1) vertrauen können.
4. Wegen der Ablehnung der Nullhypothese ist es sinnvoll, auch den einseitigen Gaußtest durchzuführen. Die Gegenhypothese muss dabei die Situation der Stichprobe widerspiegeln, also:
   $$H_0 : E[X] \geq 35\,000 \text{ gegen } H_1 : E[X] < 35\,000.$$

Gemäß Aufgabenteil b.1) ergibt sich für den p-Wert:

$$p\text{-Wert} = \frac{0{,}006}{2} = 0{,}003.$$

Wegen $0{,}003 < 0{,}05$ wird die Nullhypothese des einseitigen Gaußtests abgelehnt, das heißt das Jahresdurchschnittseinkommen eines Einwohners ist im Mittel signifikant niedriger als von der Präsidentin behauptet.