Wirtschaftsstatistik-Klausur am 27.01.2015

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Aufgabe 1
In der nachfolgenden Tabelle sind die Jahresendwerte des Dax 30 und das Wachstum (in %) des BIP gegenüber dem Vorjahr (Quelle: Bundesbank) festgehalten:

Jahr	BIP	Dax 30
2010	+4,1	6 914
2011	+3,6	5 898
2012	+0,4	7 612
2013	+0,1	9 552
2014*	+1,4	9 866

*Prognosen

a) Wie hoch ist die durchschnittliche jährliche Steigerung (in %) des Dax 30 im Zeitraum 31.12.2010 bis 31.12.2014?

b) Berechnen Sie die Korrelation zwischen der BIP-Rate und dem Dax 30.

1. Welche Stärke hat die Korrelation?
2. Welches Vorzeichen hat die Korrelation?
3. Interpretieren Sie die Korrelation inhaltlich.

c) Die Prognose des DIW für das Wachstum des BIP im Jahr 2015 beträgt 1,4%. Mit welchem Dax 30 Index wäre dann am 31.12.2015 gemäß einer linearen Regression auf das BIP zu rechnen? Und ist der berechnete Prognosewert ein inter- oder extrapolierter Wert? (Begründung!)

Aufgabe 2
Nehmen Sie an, dass die tägliche Auslieferungszeit (in Stunden) eines Paketboten normalverteilt ist mit dem Erwartungswert acht Stunden und der Standardabweichung zwei Stunden.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Paketbote

1. höchstens sieben Stunden an einem Tag unterwegs ist?
2. genau acht Stunden am Tag unterwegs ist?
3. über acht Stunden unterwegs ist?
4. zwischen sechs und zehn Stunden unterwegs ist?

b) Mit welcher Auslieferungszeit pro Tag ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens zu rechnen?

c) Nehmen Sie an, dass die täglichen Auslieferungszeiten stochastisch unabhängig voneinander sind. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paketbote

1. an zwei Arbeitstagen hintereinander mindestens einmal höchstens sieben Stunden unterwegs ist?
2. in einer Woche mit sechs Arbeitstagen nur an einem Tag höchstens sieben Stunden unterwegs ist?

Aufgabe 3
Ein international tätiges Automobil-Unternehmen möchte seinen Werkstatt-Service gezielt verbessern und führt dazu eine Kundenbefragung durch. Bei dieser Umfrage werden folgende Merkmale der Kunden abgefragt: *Geschlecht, Alter, Nationalität, jährliche Ausgaben für Reparaturen, Zufriedenheit mit dem Reparaturleistungen*.

a) Entscheiden Sie, ob die genannten Merkmale nominal, ordinal oder metrisch skaliert sind!

b) Bei der Umfrage ergaben sich die folgenden Werte der Ausgaben für Reparaturen:

Reparaturkosten	Anzahl Kunden
unter 500 €	2000
500 € - 1500 €	3000
1500 € - 2500 €	4000
2500 € - 4000 €	1000

Ihre Aufgabe ist es nun, ein Histogramm anzufertigen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Erläutern Sie kurz das Prinzip der Flächentreue, d.h. die Idee dahinter weshalb sich die Höhe eines Blocks im Histogramm berechnet als
$$\text{Höhe} = \frac{\text{relative Häufigkeit}}{\text{Klassenbreite}}.$$
2. Berechnen Sie alle Klassenbreiten, relativen Häufigkeiten und Klassenhöhen.
3. Zeichnen Sie das Histogramm.
4. Wie groß ist der Flächeninhalt des niedrigsten Blocks im Histogramm?

Lösung zu Aufgabe 1:
1. Lösungsweg:
X=BIP-Rate (in %)
Y=Dax 30

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
1	+4,1	6 914			
2	+3,6	5 898			
3	+0,4	7 612			
4	+0,1	9 552			
$n=5$	+1,4	9 866			
$\sum$	9,6	39 842	67 392,6	31,9	329 111 004

a) $\sqrt[2014-2010]{\frac{9\,866}{6\,914}} = \sqrt[4]{1{,}426960} = 1{,}092957$
d.h. die durchschnittliche jährliche Steigerung des Dax 30 im Zeitraum 31.12.2010 bis 31.12.2014 beträgt etwa 9,3%.

b) $b_1 = \dfrac{5 \cdot 67\,392{,}6 - 9{,}6 \cdot 39\,842}{5 \cdot 31{,}9 - 9{,}6^2} = \dfrac{-45\,520{,}2}{67{,}34} = -675{,}9756$

$b_2 = \dfrac{-45\,520{,}2}{5 \cdot 329\,111\,004 - 39\,842^2} = \dfrac{-45\,520{,}2}{58\,170\,056} = -0{,}000\,782\,536\,6$

$r = -\sqrt{-675{,}9756 \cdot -0{,}000\,782\,536\,6} = -\sqrt{0{,}528\,975\,6} = -0{,}727\,307\,1$

d.h. mittelstarke negative Korrelation; d.h. mittelstarke Tendenz dafür, dass steigende BIP-Raten einher gehen mit sinkenden Dax-Index-Werten.

c) Gesucht: $a_1 + b_1 \cdot 1{,}4 =?$

$a_1 = \dfrac{39\,842 - (-675{,}9756) \cdot 9{,}6}{5} = 9\,266{,}2732$

$9\,266{,}2732 + (-675{,}9756) \cdot 1{,}4 = 8\,319{,}907 \approx 8\,320$

d.h. gemäß der Methode der kleinsten Quadrate wäre mit einem Dax Index-Wert von etwa 8 320 zu rechnen. Da $1{,}4 \in [0{,}1; 4{,}1]$ liegt, ist 8 320 ein interpolierter Wert.

2. Lösungsweg:

X=BIP-Faktor

Y=Dax 30

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
1	1, 041	6 914			
2	1,036	5 898			
3	1,004	7 612			
4	1,001	9 552			
$n = 5$	1,014	9 866			
$\sum$	5,096	39 842	40 515,93	5,19519	329 111 004

b) $b_1 = \dfrac{5 \cdot 40\,515{,}93 - 5{,}096 \cdot 39\,842}{5 \cdot 5{,}19519 - 5{,}096^2} = \dfrac{-455{,}202}{0{,}006734} = -67\,597{,}56$

$b_2 = \dfrac{-455{,}202}{5 \cdot 329\,111\,004 - 39\,842^2} = \dfrac{-455{,}202}{58\,170\,056} = -0{,}000\,007\,825\,366$

$r = -\sqrt{-67\,597{,}56 \cdot -0{,}000\,007\,825\,366} = -\sqrt{0{,}528\,975\,6} = -0{,}727$

d.h. mittelstarke negative Korrelation; d.h. mittelstarke Tendenz dafür, dass steigende BIP-Raten einher gehen mit sinkenden Dax-Index-Werten.

c) Gesucht: $a_1 + b_1 \cdot 1{,}014 =?$

$a_1 = \dfrac{39\,842 - (-67\,597{,}56) \cdot 5{,}096}{5} = 76\,863{,}84$

$76\,863{,}84 + (-67\,597{,}56) \cdot 1{,}014 = 8\,319{,}9 \approx 8\,320$

d.h. gemäß der Methode der kleinsten Quadrate wäre mit einem Dax Index-Wert von etwa 8 320 zu rechnen. Da $1{,}014 \in [1{,}001; 1{,}041]$ liegt, ist 8 320 ein interpolierter Wert.

Lösung zu Aufgabe 2:

X=Auslieferungszeit (in Stunden) eines Paketbotens

$X \sim \mathsf{N}(\mu = 8; \sigma = 2)$

a) 1. $P(X \leq 7) = F_U\left(\dfrac{7-8}{2}\right) = F_U(-0{,}5) = 0{,}309$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 30,9%.

2. $P(X = 8) = 0$; d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0%.

3. $P(X > 8) = P(X > \mu) = 0{,}5$; d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 50%.
4. *1. Lösungsweg:*
   68% ist die Überdeckungswahrscheinlichkeit des einfachen zentralen Schwankungsintervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma] = [6; 10]$; d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 68%.
   2. Lösungsweg:
   $P(X \leq 10) - P(X \leq 6) = F_U\left(\frac{10-8}{2}\right) - F_U\left(\frac{6-8}{2}\right) = F_U(1) - F_U(-1) = 0{,}841 - 0{,}159 = 0{,}682 \approx 0{,}68$

b) $0{,}05 = P(X \leq x) \Leftrightarrow -1{,}6449 = \frac{x-8}{2} \Leftrightarrow x = 8 - 1{,}6449 \cdot 2 = 4{,}7102$
d.h. die gesuchte Auslieferungszeit beträgt etwa 4,7 Stunden.

c) 1. *1. Lösungsweg:*
   $P((X_1 \leq 7) \cup (X_2 \leq 7)) = P(X_1 \leq 7) + P(X_2 \leq 7) - P((X_1 \leq 7) \cap (X_2 \leq 7)) = 0{,}309 + 0{,}309 - 0{,}309 \cdot 0{,}309 = 0{,}523$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 52,3%.
   2. Lösungsweg:
   Y=Anzahl der Tage, in denen die Auslieferungszeit höchstens sieben Stunden beträgt.
   $Y \sim \mathsf{B}(n = 2; p = 0{,}309)$
   $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{2}{0} \cdot 0{,}309^0 \cdot 0{,}691^2 = 1 - 0{,}477 = 0{,}523$
2. Y=Anzahl der Tage, in denen die Auslieferungszeit höchstens sieben Stunden beträgt.
   $Y \sim \mathsf{B}(n = 6; p = 0{,}309)$
   $P(Y = 1) = \binom{6}{1} \cdot 0{,}309 \cdot 0{,}691^5 = 0{,}2920788 \approx 0{,}292$
   d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 29,2%.

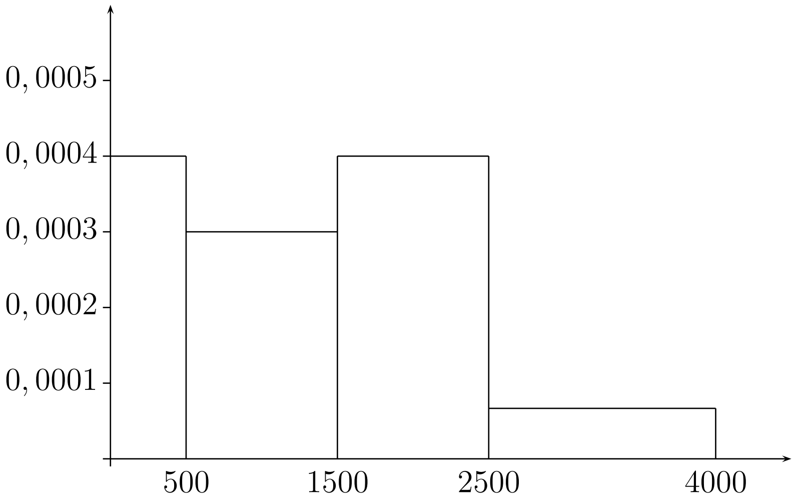
Lösung zu Aufgabe 3:

a) *Geschlecht, Nationalität:* nominal.
Zufriedenheit mit den Reparaturleistungen: ordinal.
Alter, jährliche Ausgaben für Reparaturen: metrisch.

b) 1. Das Prinzip der Flächentreue besagt, dass die Höhe eines Blocks im Histogramm so gewählt werden muss, dass dessen Flächeninhalt proportional zur relativen Häufigkeit der Klasse ist. Genau dies spiegelt die Formel wider.
2. Die Tabelle ergänzt sich wie folgt:

Reparatur-kosten	Anzahl Kunden	Klassen-breite	rel. Häu-figkeit	Klassen-höhe
unter 500 €	2000	500	0,2	0,0004
500 € - 1500 €	3000	1000	0,3	0,0003
1500 € - 2500 €	4000	1000	0,4	0,0004
2500 € - 4000 €	1000	1500	0,1	0,000067

3. Es ist darauf zu achten, dass die x und die y-Achse im Diagramm mit einer geeigneten Skalierung gewählt werden. Dann ergibt sich:



4. Der niedrigste Block im Histogramm hat den Flächeninhalt $n_4/n = 0{,}1$.