Wirtschaftsstatistik-Klausur 27.09.2016

Aufgabe 1
Ein PC-Händler verzeichnet in Abhängigkeit vom Verkaufspreis folgenden Absatz an PCs in den letzten fünf Verkaufsperioden:

Absatz in ME	Preis in GE pro ME	
20	2	
22	1,9	
16	2,2	
18	2,1	
25	1,8	

a) Welcher Absatz ist gemäß der Methode der kleinsten Quadrate zu erwarten, wenn ein Preis von 1,6 GE pro ME für die kommende Verkaufsperiode angesetzt wird?

b) Welcher Verkaufspreis ist gemäß der Methode der kleinsten Quadrate anzunehmen, damit der Absatz in der kommenden Verkaufsperiode 24 ME beträgt?

c) Wie verlässlich sind die Berechnungen unter a) und unter b)? (Begründung!)

Aufgabe 2
In einer Handballliga gibt es für einen Sieg zwei Punkte, für ein Unentschieden einen Punkt und für eine Niederlage null Punkte. Aus historischen Daten wird für den Verein *Kölner Handballfreunde* geschätzt, dass ein Sieg doppelt so wahrscheinlich ist wie ein Unentschieden und dass eine Niederlage ebenso wahrscheinlich ist wie ein Sieg, d.h.

	Sieg	Unentschieden	Niederlage
Punkte:	2	1	0
Wahrscheinlichkeit:	2p	p	2p

Die Zufallsvariable X bezeichne die Punkte pro Spiel.

a) Zeigen Sie, dass $p = 0{,}2$ gilt!

b) Mit wie vielen Punkten pro Spiel können die *Kölner Handballfreunde* im Mittel rechnen?

c) Wie groß ist die Varianz von X?

d) Eine Saison der Handballliga besteht aus 34 Spieltagen. Erfahrungsgemäß reichen 26 Punkte für den Klassenerhalt in derselben Liga, und für den Aufstieg in eine andere Liga werden 60 Punkte benötigt. Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit für den Klassenerhalt, d.h. dass die *Kölner Handballfreunde* auch in der nächsten Saison noch in derselben Liga spielen werden?

e) Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die *Kölner Handballfreunde* für die nächsten 5 Saisons stets in derselben Liga bleiben, also für den Klassenerhalt in 5 Saisons? Nehmen Sie an, dass die Wahrscheinlichkeit für den Klassenerhalt sich (unabhängig von der Liga) nicht verändert und dass die Ergebnisse der Saisons voneinander stochastisch unabhängig sind.

Lösung zu Aufgabe 1:
x=Preis
y=Absatzmenge

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
	2	20			
	1,9	22			
	2,2	16			
	2,1	18			
	1,8	25			
$\sum$	10	101	199,8	20,1	2 089

a) Gesucht: $a_1 + b_1 \cdot 1{,}6 =?$
$b_1 = \dfrac{5 \cdot 199{,}8 - 101 \cdot 10}{5 \cdot 20{,}1 - 10 \cdot 10} = -\dfrac{11}{0{,}5} = -22$
$a_1 = \dfrac{101 - (-22) \cdot 10}{5} = 64{,}2$
$64{,}2 - 22 \cdot 1{,}6 = 29{,}0$
d.h. es ist mit einem Absatz von etwa 29 ME zu rechnen.

b) Gesucht: $a_2 + b_2 \cdot 24 =?$
$b_2 = \dfrac{-11}{5 \cdot 2\,089 - 101 \cdot 101} = -\dfrac{11}{244} = -0{,}045$
$a_2 = \dfrac{10 - (-0{,}045) \cdot 101}{5} = 2{,}91$
$2{,}91 - 0{,}045 \cdot 24 = 1{,}83$
d.h. es ist ein Preis von etwa 1,83 GE anzusetzen.

c) $B = b_1 \cdot b_2 = (-22) \cdot (-0{,}045) = 0{,}99$
$r = -\sqrt{B} = -\sqrt{0{,}99} = -0{,}995$
d.h. es liegt eine starke negative Korrelation vor.
Bei der Berechnung unter a) handelt es sich um eine Extrapolation, weil gilt: $1{,}6 \notin [x_{min}; x_{max}] = [1{,}8; 2{,}2]$. Und auf extrapolierte Prognosewerte, hier 29 ME, ist wenig Verlass.
Bei der Berechnung unter b) handelt es sich um eine Ínterpolation, weil $24 \in [y_{min}; y_{max}] = [16; 25]$. Auf diesen interpolierten Prognosewert 1,83 GE ist Verlass, da die Korrelation stark ist.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Für p muss die Gleichung
$$2p + p + 2p = 1,$$
also $p = 0,2$, erfüllt sein, weil sich die Einzel-Wahrscheinlichkeiten zu 1 addieren müssen.

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,4	0,2	0,4

b) Gesucht ist der Erwartungswert von X. Dieser berechnet sich als
$$E[X] = 0,4 \cdot 0 + 0,2 \cdot 1 + 0,4 \cdot 2 = 1.$$

Das heißt, dass die *Kölner Handballfreunde* im Schnitt mit einem Punkt pro Spiel rechnen können.

c) Es gilt

$$Var[X] = 0,4 \cdot (0-1)^2 + 0,2 \cdot (1-1)^2 + 0,4 \cdot (2-1)^2 = 0,8.$$

Die Varianz beträgt also $0,8(\text{Punkte}^2)$.

d) Die Saison besteht aus $n = 34$ Spielen. Damit ist die Faustregel $n \geq 30$ erfüllt und wir dürfen den Zentralen Grenzwertsatz anwenden. Es bezeichne $Y = X_1 + \ldots + X_{34}$ die Anzahl der Punkte der *Kölner Handballfreunde* in einer Saison. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$P(26 \leq Y < 60) = P(Y \leq 59) - P(Y \leq 25).$$

Hierauf wenden wir den zentralen Grenzwertsatz an

$$\begin{aligned} P(Y \leq 59) - P(Y \leq 25) &\approx F_U\left(\frac{59 - 34 \cdot 1}{\sqrt{34 \cdot 0,8}}\right) - F_U\left(\frac{25 - 34 \cdot 1}{\sqrt{34 \cdot 0,8}}\right) \\ &\approx F_U(4,794) - F_U(-1,726) \\ &\approx 1 - 0,042 = 0,958. \end{aligned}$$

Die *Kölner Handballfreunde* spielen also mit der Wahrscheinlichkeit 95,8% auch in der nächsten Saison noch in derselben Liga.

e) Es bezeichne die Zufallsvariable Z die Anzahl der Saisons ohne Wechsel der Liga. Dann ist laut Angabe $Z \sim B(n = 5; p = 0{,}958)$. Die *Kölner Handballfreunde* werden in den nächsten 5 Jahren die Liga mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(Z = 0) = \binom{5}{5} 0{,}958^5 \cdot 0{,}042^0 \approx 0{,}807.$$

nie wechseln. Die Wahrscheinlichkeit, dass die *Kölner Handballfreunde* in den nächsten 5 Saisons weder auf- noch absteigen beträgt also etwa 80,7%.

QM 2 Klausur 27.09.2016

Aufgabe 2

Ein Handy- und PC-Hersteller verfügt über ein exklusives Filialnetz von 900 Filialen. Der Gewinn (in GE) der Filialen ist in der folgenden Tabelle nach Klassen dargestellt:

Nr.	Gewinn	Anzahl der Filialen
1	0 bis 250 000	300
2	über 250 000 bis 500 000	400
3	über 500 000 bis 750 000	150
4	über 750 000 bis 1 000 000	50

a) Ermitteln Sie, welcher Gewinn von 60% der Filialen nicht überschritten wurde.

b) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und den Median des Gewinns und interpretieren Sie die Ergebnisse.

c) Berechnen Sie die Standardabweichung des Gewinns und interpretieren Sie diese.

d) In der Filiale mit dem größten Gewinn wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde ein Handy kauft, mit 25% beziffert. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde einen PC kauft, wird mit 15% angegeben. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde sowohl ein Handy als auch einen PC kauft, liegt bei 3,75%.

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Ein Kunde kauft nichts."
2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Ein Kunde kauft mindestens eines der beiden Produkte."
3. Prüfen Sie, ob der Kauf eines Handys und der Kauf eines PCs stochastisch unabhängig voneinander sind.

Lösung zu Aufgabe 2:

j	$x_{j-1}^* < x \leq x_j^*$	n_j	F	x_j'
1	$0 \leq x \leq 250\,000$	300	3/9	125 000
2	$250\,000 < x \leq 500\,000$	400	7/9	375 000
3	$500\,000 < x \leq 750\,000$	150	8,5/9	625 000
4	$750\,000 < x \leq 1\,000\,000$	50	1	875 000
$\sum$		$n = 900$	1	

a) $x_{0{,}60} \approx 250\,000 + \dfrac{0{,}6 - 3/9}{4/9} \cdot 250\,000 = 400\,000$

b) $\overline{x} \approx 125\,000 \cdot \dfrac{3}{9} + 375\,000 \cdot \dfrac{4}{9} + 625\,000 \cdot \dfrac{1{,}5}{9} + 875\,000 \cdot \dfrac{0{,}5}{9} = 361\,111{,}1 \approx 361\,111$

d.h. der durchschnittliche Gewinn pro Filiale beträgt etwa 361 111 GE.

$x_{0{,}50} \approx 250\,000 + \dfrac{0{,}5 - 3/9}{4/9} \cdot 250\,000 = 343\,750$

d.h. 50% aller Filialen machen einen Gewinn von etwa höchstens 343 750 GE.

c) $s^2 \approx (125\,000 - 361\,111{,}1)^2 \cdot \frac{3}{9} + (375\,000 - 361\,111{,}1)^2 \cdot \frac{4}{9} + (625\,000 - 361\,111{,}1)^2 \cdot \frac{1{,}5}{9} + (875\,000 - 361\,111{,}1)^2) \cdot \frac{0{,}5}{9} = 44\,945\,987\,654$

$s \approx \sqrt{44\,945\,987\,654} \approx 212\,004{,}69$

d.h. die Schwankungen des Datensatzes gemessen mit der Standardabweichung betragen in etwa 212 005 GE.

d) H= zufällig ausgewählter Kunde kauft ein Handy

PC=zufällig ausgewählter Kunde kauft einen PC

	H	$\overline{H}$	
PC	0,0375	0,1125	0,15
$\overline{PC}$	0,2125	0,6375	0,85
	0,25	0,75	1

1. $P(\overline{PC} \cap \overline{H}) = 0{,}6375$
2. $P(PC \cup H) = 1 - 0{,}6375 = 0{,}3625$
3. $P(PC) \cdot P(H) = 0{,}25 \cdot 0{,}15 = 0{,}0375 = P(PC \cap H)$

   d.h. PC und H sind stochastisch unabhängig voneinander.

QM III-Klausur 27.09.2016

Aufgabe 1
Ein Unternehmen hat eine weitere Abfüllmaschine für Gewürzpackungen angeschafft. Das Unternehmen möchte wissen, ob die neue Maschine die Füllmenge von 12 g pro Packung im Mittel einhält. Aus den Aufzeichnungen der letzten Jahre der übrigen Maschinen ist bekannt, dass die Standardabweichung $s_{alt} = 1{,}4$ g beträgt.

a) Wie viele Packungen muss das Unternehmen nachwiegen, damit das approximative 0,99-Konfidenzintervall für die mittlere Füllmenge die Breite 0,5 g hat?

b) Eine Beobachtung von 210 Packungen ergab eine durchschnittliche Füllmenge von 12,3 g pro Packung. Die Standardabweichung betrug 1,2 g. Wie lautet das approximative 0,99-Konfidenzintervall für die mittlere Füllmenge einer Packung?

c) Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die tatsächliche Füllmenge (in g) einer Packung normalverteilt mit $\mu = 12{,}3$ und $\sigma = 1{,}2$ ist.
Welches Gewicht wird von 99,8% aller Packungen überschritten?

Aufgabe 2
In Deutschland stehen stillenden berufstätigen Müttern während der Arbeitszeit Stillzeiten zu, die nicht nachgearbeitet werden dürfen. Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Niveau 0,05, ob die Stillbereitschaft davon abhängt, ob eine Mutter berufstätig ist oder nicht. Eine Umfrage unter Müttern von sechs Monate alten Kindern, ob sie stillen und ob sie berufstätig sind, ergab folgende Daten:

	Berufstätig		
Stillen	nein	ja	
nein	40	80	
ja	70	10	

Gehen Sie wie folgt vor:

a) Wie heißt der Test?

b) Wie lautet die Nullhypothese des Tests?

c) Überprüfen Sie, ob die Faustregel des Tests erfüllt ist.

d) Berechnen Sie den empirischen Wert der Teststatistik.

e) Wie lautet die Testentscheidung aufgrund der obigen Stichprobe? (Begründung!) Interpretieren Sie in knappen Worten das Ergebnis.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Für den Mindeststichprobenumfang gilt:
$$n \geq \frac{2{,}5758^2 \cdot 1{,}4^2}{0{,}25^2} \approx 208{,}07.$$
Das heißt, es müssen mindestens 209 Packungen nachgewogen werden.

b) Weil der Stichprobenumfang größer als 30 ist, ist die Faustregal erfüllt nach der die Annahmen des zentralen Grenzwertsatzes greifen. Deshalb ist das gesuchte Konfidenzintervall gegeben durch:

$$\left[12{,}3 - 2{,}5758\frac{1{,}2}{\sqrt{210}}; 12{,}3 + 2{,}5758\frac{1{,}2}{\sqrt{210}}\right] \approx [12{,}09; 12{,}51] .$$

c) Es bezeichne X die Zufallsvariable *Abfüllmenge*. Es ist $X \sim \mathcal{N}(\mu = 12{,}3; \sigma = 1{,}2)$. Damit gilt für das 0,2% Quantil von X:

$$\begin{aligned} 0{,}002 = P(X \leq x) &= F_U\left(\tfrac{x-12{,}3}{1{,}2}\right) \Leftrightarrow \\ -2{,}8782 &= \tfrac{x-12{,}3}{1{,}2} \Leftrightarrow \\ x &= 12{,}3 - 3{,}4538 \Leftrightarrow \\ x &= 8{,}85. \end{aligned}$$

D.h. bei 99,8 % aller Packungen liegt das Gewicht über 8,85 g.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest

b) H_0: Stillbereitschaft und Berufstätigkeit sind stochastisch unabhängig

c) Erwartete Häufigkeiten:

	Berufstätig		
Stillen	nein	ja	
nein	66	54	120
ja	44	36	80
	110	90	200

Die minimale erwartete Häufigkeit beträgt somit 36 und ist größergleich eins. Außerdem hat keine Zelle eine erwartete Häufigkeit kleiner als fünf, erlaubt wären hier bis zu 20% aller Zellen. Also ist die Faustregel erfüllt.

d) Da $df = 1$ gilt, greift die Kontinuitätskorrektur nach Yates:

$$T\text{emp.} = \frac{(\mid 40-66 \mid -0{,}5)^2}{66} + \frac{(\mid 80-54 \mid -0{,}5)^2}{54} + \frac{(\mid 70-44 \mid -0{,}5)^2}{44} + \frac{(\mid 10-36 \mid -0{,}5)^2}{36} = 54{,}735$$

e) Der obere 5%-Punkt der Chi-Quadrat-Verteilung mit einem Freiheitsgrad beträgt 3,841. Da gilt: $54{,}735 > 3{,}841$ wird H_0 abgelehnt; d.h. die Stillbereitschaft hängt davon ab, ob eine Mutter berufstätig ist.