Wirtschaftsstatistik-Klausur am 28.09.2017

Aufgabe 1

Ein Unternehmen geht bei der Durchführung eines Bauprojekts davon aus, dass sich bei Baubeginn die tatsächlich entstehenden Kosten nicht exakt kalkulieren lassen. Daher befragt das Unternehmen mehrere Experten nach ihrer Einschätzung. Daraus ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung für die tatsächlich enstehenden Baukosten in Geldeinheiten (GE):

Baukosten	100 GE	105 GE	110 GE	115 GE	120 GE
Wahrscheinlichkeit	2%	28%	65%	3%	2%

Das Unternehmen möchte zur Absicherung der Baukosten und dem damit verbundenen Risiko eine Rücklage bilden.

a) Wie hoch muss die Rücklage sein, wenn sie in Höhe der erwarteten Baukosten gebildet wird? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Rücklage dann ausreichend bemessen?

b) Die Rücklage soll wie folgt gebildet werden:
„Rücklage = erwartete Baukosten + Streuung gemessen in der Standardabweichung“.
Wie hoch muss die Rücklage sein?

c) Wie hoch muss die Rücklage mindestens sein, wenn sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% ausreichend bemessen sein soll?

d) Wie hoch muss die Rücklage sein, wenn sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% ausreichend bemessen sein soll?

e) Die Rücklage soll in Höhe der erwarteten Kosten der 5% Kosten-intensivsten Fälle gebildet werden. Wie hoch muss dann die Rücklage sein?

Aufgabe 2

Ein Unternehmen hat eine weitere Abfüllmaschine für Gewürzpackungen angeschafft. Das Unternehmen möchte wissen, ob die neue Maschine die Füllmenge von 12 g pro Packung im Mittel einhält. Aus den Aufzeichnungen der letzten Jahre der übrigen Maschinen ist bekannt, dass die Standardabweichung $s_{alt} = 1{,}4$ g beträgt.

a) Wie viele Packungen muss das Unternehmen nachwiegen, damit das approximative 0,99-Konfidenzintervall für die mittlere Füllmenge die Breite 0,5 g hat?

b) Eine Beobachtung von 210 Packungen ergab eine durchschnittliche Füllmenge von 12,3 g pro Packung. Die Standardabweichung betrug 1,2 g. Wie lautet das approximative 0,99-Konfidenzintervall für die mittlere Füllmenge einer Packung?

c) Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die tatsächliche Füllmenge (in g) einer Packung normalverteilt mit $\mu = 12{,}3$ und $\sigma = 1{,}2$ ist.
Welches Gewicht wird von 99,8% aller Packungen überschritten?

Lösung zu Aufgabe 1:
X = Baukosten (in GE)

a) $E[X] = 0{,}02 \cdot 100 + 0{,}28 \cdot 105 + 0{,}65 \cdot 110 + 0{,}3 \cdot 115 + 0{,}02 \cdot 120 = 108{,}75$
d.h. die Rücklage in Höhe der erwarteten Baukosten beträgt 108,75 GE.
$P(X \leq 108{,}75) = P(X \leq 105) = 0{,}30$
d.h. die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass die Baukosten nicht höher sind als die erwartete Rücklage, beträgt 30%.

b) $V[X] = (100 - 108{,}75)^2 \cdot 0{,}02 + (105 - 108{,}75)^2 \cdot 0{,}28 + (110 - 108{,}75)^2 \cdot 0{,}65 + (115 - 108{,}75)^2 \cdot 0{,}03 + (120 - 108{,}75)^2 \cdot 0{,}02 = 10{,}1875$
$\sqrt{V[X]} = \sqrt{10{,}1875} = 3{,}191786$
$E[X] + \sqrt{V[X]} = 108{,}75 + 3{,}191786 = 111{,}9418$
d.h. die Rücklage muss 111,94 GE betragen.

c) $P(X \leq x) \geq 0{,}80 \Leftrightarrow x = 110$
d.h. die Rücklage muss mindestens 110 GE hoch sein, um mit der Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% ausreichend bemessen zu sein.

d) $P(X \leq x) = 0{,}95 \Leftrightarrow x = 110$
d.h. wenn die Rücklage 110 GE beträgt, so liegen die tatsächlich anfallenden Baukosten mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nicht über diesen Wert.

e) $115 \cdot \dfrac{0{,}03}{0{,}05} + 120 \cdot \dfrac{0{,}02}{0{,}05} = 117$
d.h. die erwarteten Baukosten der 5%-Kosten-intensivsten Fälle beträgt 117 €.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Für den Mindeststichprobenumfang gilt:
$$n \geq \frac{2{,}5758^2 \cdot 1{,}4^2}{0{,}25^2} \approx 208{,}7.$$
Das heißt, es müssen mindestens 209 Packungen nachgewogen werden.

b) Weil der Stichprobenumfang größer als 30 ist, ist die Faustregal erfüllt nach der die Annahmen des zentralen Grenzwertsatzes greifen. Deshalb ist das gesuchte Konfidenzintervall gegeben durch:
$$\left[12{,}3 - 2{,}5758\frac{1{,}2}{\sqrt{210}}; 12{,}3 + 2{,}5758\frac{1{,}2}{\sqrt{210}}\right] \approx [12{,}09; 12{,}51]\,.$$

c) Es bezeichne X die Zufallsvariable *Abfüllmenge*. Es ist $X \sim \mathcal{N}(\mu = 12{,}3; \sigma = 1{,}2)$. Damit gilt für das 0,2% Quantil von X:
$$\begin{aligned} 0{,}002 = P(X \leq x) &= F_U\left(\tfrac{x-12{,}3}{1{,}2}\right) \Leftrightarrow \\ -2{,}8782 &= \tfrac{x-12{,}3}{1{,}2} \Leftrightarrow \\ x &= 12{,}3 - 3{,}4538 \Leftrightarrow \\ x &= 8{,}85. \end{aligned}$$
D.h. bei 99,8 % aller Packungen liegt das Gewicht über 8,85 g.

QM II Klausur am 28.09.2017

Aufgabe 2

Für sieben Unternehmen sind die folgenden Daten hinsichtlich der Anzahl der Mitarbeiter und des Börsenwerts (in Mio. Euro) zu beobachten:

Mitarbeiter	Börsenwert in Mio. Euro
1.235	6.200
1.489	4.027
1.703	9.191
2.754	14.802
4.872	11.486
8.982	27.122
10.289	31.996

a) Die Variable X bezeichnet den Börsenwert in Mio. Euro. Klassieren Sie die Daten anhand der folgenden Klassen:

Börsenwert in Mio. Euro	Anzahl
$0 < X \leq 10.000$	
$10.000 < X \leq 20.000$	
$20.000 < X \leq 30.000$	
$30.000 < X \leq 40.000$	

und berechnen Sie anhand der klassierten Daten näherungsweise den Durchschnittswert des Börsenwerts in Mio. Euro.

b) Berechnen Sie die Varianz und den Variationskoeffizienten der Mitarbeiter. Interpretieren Sie die berechneten Größen und gehen Sie dabei auf die Maßeinheiten von Varianz und Variationskoeffizient ein.

c) Geben Sie die Stärke des linearen Zusammenhangs zwischen Mitarbeiter und Börsenwert an und interpretieren Sie diesen.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Für X=„Börsenwert (in Mio Euro)“ ergeben sich die folgenden klassierten Daten:

Klasse	n_j	x'_j
$0 < X \leq 10.000$	3	5 000
$10.000 < X \leq 20.000$	2	15 000
$20.000 < X \leq 30.000$	1	25 000
$30.000 < X \leq 40.000$	1	35 000
$\sum$	$n = 7$	

$$\bar{x} \approx \frac{1}{7}\left[5\,000 \cdot 3 + 15\,000 \cdot 2 + 25\,000 \cdot 1 + 35\,000 \cdot 1\right] = 15\,000$$

b) Arbeitstabelle für X:

i	x_i	x_i^2
1	1 235	1 525 225
2	1 489	2 217 121
3	1 703	2 900 209
4	2 754	7 584 516
5	4 872	23 736 384
6	8 982	80 676 324
7	10 289	105 863 521
$\sum$	31 324	224 503 300

$\bar{x} \approx \frac{31\,324}{7}$

$s_x^2 \approx \frac{224\,503\,300}{7} - \left(\frac{31\,324}{7}\right)^2 \approx 12\,047\,554$

d.h. die Schwankungen im Datensatz gemessen mit der empirischen Varianz betragen näherungsweise 12 047 554 Mitarbeiter · Mitarbeiter.

$v_x \approx \frac{\sqrt{12\,047\,554}}{31\,324/7} = 0{,}775658$

d.h. die Schwankungen im Datensatz gemessen mit dem Variationskoeffizienten betragen etwa 78% Prozent vom arithmetischen Mittel.

c) Mit X und Y=„Anzahl Mitarbeiter“ ergibt sich folgende Arbeitstabelle:

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	1 235	6 200	1 525 225	38 440 000	7 657 000
2	1 489	4 027	2 217 121	16 216 729	5 996 203
3	1 703	9 191	2 900 209	84 474 481	15 652 273
4	2 754	14 802	7 584 516	219 099 204	40 764 708
5	4 872	11 486	23 736 384	131 928 196	55 959 792
6	8 982	27 122	80 676 324	735 602 884	243 609 804
7	10 289	31 996	105 863 521	1 023 744 016	329 206 844
$\sum$	31 324	104 824	224 503 300	2 249 505 510	698 846 624

$b_1 = \frac{7 \cdot 698\,846\,624 - 31\,324 \cdot 104\,824}{7 \cdot 224\,503\,300 - 31\,324^2} = \frac{1\,608\,419\,392}{590\,330\,124} = 2{,}72461$

$b_2 = \frac{1\,608\,419\,392}{7 \cdot 2\,249\,505\,510 - 104\,824^2} = \frac{1\,608\,419\,392}{4\,758\,467\,594} = 0{,}3380121$

$r_{xy} = \sqrt{2{,}72461 \cdot 0{,}3380121} = 0{,}959662$

d.h. es gibt einen starken positiven linearen Zusammenhang zwischen X und Y; d.h. es gibt eine starke Tendenz dafür, dass mit steigender Anzahl der Mitarbeiter auch der Börsenwert eines Unternehmens steigt.

QM III Klausur am 28.09.2017

Aufgabe 1

a) Es ist bekannt, dass das Gewicht von Brötchen (in Gramm) einer bestimmten Bäckerei normalverteilt ist mit der theoretischen Varianz 2,56.

1. Bei einer Stichprobe vom Umfang 25 hat sich ein durchschnittliches Brötchengewicht von 47,54 Gramm ergeben. Bestimmen Sie ein konkretes Konfidenzintervall für den Erwartungswert des Brötchengewichts zum Konfidenzniveau 0,95!
2. Wie groß muss die Stichprobe mindestens sein, damit ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0,95 für den Erwartungswert des Brötchengewichts eine Breite von höchstens 0,5 Gramm hat?
3. Wie verändert sich (bei gleichem Konfidenzniveau) die Breite des Konfidenzintervalls aus Teilaufgabe a.1), wenn der Stichprobenumfang vervierfacht wird?

b) Es ist weiterhin bekannt, dass das Gewicht von Brötchen (in Gramm) einer zweiten Bäckerei ebenfalls normalverteilt ist, wobei hier beide Parameter μ und σ^2 unbekannt sind. Für diese Bäckerei hat eine Stichprobe vom Umfang 30 ein durchschnittliches Brötchengewicht von 48,21 Gramm und eine empirische Varianz von 3,24 ergeben.
Bestimmen Sie ein konkretes Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0,96 für den Erwartungswert des Brötchengewichts dieser zweiten Bäckerei und interpretieren Sie das Ergebnis!

Aufgabe 2

Eine Reifenwerkstatt möchte untersuchen, ob die Anzahl der Reparaturen an jedem der fünf Wochentage Mo, Di, Mi, Do, Fr in etwa gleich hoch ist. Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Niveau 0,05, ob die fünf Reparatur-Wochentage gleich wahrscheinlich sind. In der letzten Woche wurden an den einzelnen Wochentagen so viele Reparaturen durchgeführt:

Wochentag	Mo	Di	Mi	Do	Fr
Anzahl Reparaturen	30	40	40	60	30

Gehen Sie wie folgt vor:

a) Wie heißt der Test?

b) Wie lautet die Nullhypothese des Tests?

c) Überprüfen Sie, ob die Faustregel des Tests erfüllt ist.

d) Berechnen Sie den empirischen Wert der Teststatistik.

e) Wie lautet die Testentscheidung aufgrund der obigen Stichprobe? (Begründung!) Interpretieren Sie in knappen Worten das Ergebnis.

Lösung zu Aufgabe 1

a) 1. Das konkrete Konfidenzintervall zum Niveau 95% lautet:

$$47{,}54 \pm 1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{2{,}56}}{\sqrt{25}} = [46{,}9; 48{,}2]$$

2. $n \geq \dfrac{1{,}96^2 \cdot 2{,}56}{0{,}25^2} = 157{,}4 \approx 158$
   d.h. der Stichprobenumfang muss mindestens 158 betragen.

3. Die Breite des konkreten Konfidenzintervalls halbiert sich und ergibt sich damit als $\dfrac{48{,}2 - 46{,}9}{2} = \dfrac{1{,}3}{2} = 0{,}65$.

b) Faustregel $n \geq 30$ ist erfüllt. Das konkrete Konfidenzintervall bei unbekannter Varianz zum Niveau 96% lautet:
$48{,}21 \pm 2{,}0537 \cdot \dfrac{\sqrt{3{,}24}}{\sqrt{30}} \approx [47{,}5; 48{,}9]$ d.h. [47,5;48,9] ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem das mittlere Gewicht eines Brötchens mit der Wahrscheinlichkeit von 0,96 liegt.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Chi-Quadrat-Anpassungsstest

b) p_1=Wahrscheinlichkeit, dass eine Reparatur am Montag stattfindet
usw.
p_5=Wahrscheinlichkeit, dass eine Reparatur am Freitag stattfindet
H_0: $p_1 = \ldots = p_5 = \frac{1}{5}$

c) Erwartete Häufigkeiten:

Wochentag	Mo	Di	Mi	Do	Fr	
Anzahl Kunden	30	40	40	60	30	$n = 200$
$n \cdot p_i$	40	40	40	40	40	200

Somit ist die Faustregel $n \cdot p_i \geq 5$ erfüllt.

d) Der empirische Wert der Teststatistik beträgt:
$$T\text{emp.} = \frac{(30-40)^2}{40} + \frac{(40-40)^2}{40} + \frac{(40-40)^2}{40} + \frac{(60-40)^2}{40} + \frac{(30-40)^2}{40} = 15$$

e) Der obere 5%-Punkt der Chi-Quadrat-Verteilung mit vier Freiheitsgraden beträgt 9,488. Da gilt: $15 > 9{,}488$ wird H_0 abgelehnt; d.h. die Reparatur-Wochentage sind nicht alle gleich wahrscheinlich.