QM II-Klausur am 31.01.2018

Aufgabe 2

Die folgende Tabelle stellt das Bruttoinlandsprodukt (in Mio. Euro), die prozentuale Änderung des Bruttoinlandsprodukts gegenüber dem Vorjahr (Wirtschaftswachstum) sowie den jährlichen Zins für den Zeitraum 2013 bis 2017 in einer Volkswirtschaft dar.

Jahr	BIP (in Mio. Euro)	Wirtschaftswachstum	Zins
2013	105,00	5%	5%
2014	108,15	3%	3%
2015	105,99	−2%	2%
2016	108,11	2%	1%
2017	112,43	4%	2%

a) Beurteilen Sie die Stärke des linearen Zusammenhangs zwischen Zins und Wirtschaftswachstum.

b)
1. Welchen Wert für das Wirtschaftswachstum erwarten Sie auf Basis einer linearen Regression, wenn sich der Zins auf 3% beläuft?
2. Ist der in Teilaufgabe a) berechnete Wert zuverlässig?

c) Berechnen Sie das durchschnittliche jährliche Wirtschaftswachstum für den Zeitraum 2012 bis 2017 und begründen Sie Ihre Wahl des LagemaÃŸes.

Lösung zu Aufgabe 2:

X=Wirtschaftswachstum (in % gegenüber dem Vorjahr)

Y=Zins (in %)

Arbeitstabelle:

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
5	5			
3	3			
−2	2			
2	1			
4	2			
12	13	40	58	43

$$b_1 = \frac{5 \cdot 40 - 12 \cdot 13}{5 \cdot 58 - 12^2} = \frac{44}{146} = 0{,}301$$

$$b_2 = \frac{44}{5 \cdot 43 - 13^2} = \frac{44}{46} = 0{,}957$$

a) $r = \sqrt{0{,}301 \cdot 0{,}957} = \sqrt{0{,}288057} = 0{,}537$

Der lineare Zusammenhang ist mittelstark.

b)
1. $a_2 + b_2 \cdot 3 = ?$

$$a_2 = \frac{12 - 0{,}957 \cdot 13}{5} = -0{,}088$$

$-0{,}088 + 0{,}957 \cdot 3 = 2{,}783 \approx 3$
d. h. es ist ein Wirtschaftswachstum von etwa 3% zu erwarten.

2. Da die Korrelation lediglich mittelstark ist, ist auf den Prognosewert kein Verlass.

c) Bei prozentualen Veränderungen von Wachstumsvorgängen liegt ein multiplikativer Zusammenhang vor:
neuer Wert = alter Wert mal Faktor.
Deshalb ist das geometrische Mittel der Faktoren zu berechnen:
$x_{\mathrm{G}} = \sqrt[2017-2012]{1{,}05 \cdot 1{,}03 \cdot 0{,}98 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}04} = \sqrt[5]{1{,}12431} = 1{,}023711$
d. h. im Zeitraum 2012 bis 2017 betrug das durchschnittliche jährliche Wachstum etwa 2 %.

QM III-Klausur am 30.01.2018

Aufgabe 1

a) Es soll ein 0,92-Konfidenzintervall für den Anteil der Fahrten unter Alkoholeinfluss bei einem groben Verstoß gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung berechnet werden. Ein grober Verstoß liegt genau dann vor, wenn die Geschwindigkeitsüberschreitung mindestens 21 km/h beträgt.

   1. Wie viele grobe Verstöße gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung müssten mindestens ausgewertet werden, damit die Abweichung des Anteils der Fahrten unter Alkoholeinfluss bei einem groben Verstoß gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung höchstens 5%-Punkte beträgt?
   2. In einem Kölner Veddel wurden im 1. Halbjahr 2017 genau 440 grobe Verstöße gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung festgestellt. Davon wurden 88 Verstöße unter Alkoholeinfluss begangen. Berechnen und interpretieren Sie das gesuchte Konfidenzintervall.

b) Nehmen Sie an, dass der Anteil der Fahrten unter Alkoholeinfluss bei einem groben Verstoß gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung 20% beträgt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Geschwindigkeitskontrolle mit zehn groben Verstößen gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung

   1. kein Fahrer
   2. höchstens zwei Fahrer
   3. mindestens zwei Fahrer

   unter Alkoholeinfluss stehen.

Aufgabe 2

Prüfen Sie mit einem Test zum Niveau 0,05 anhand der nachfolgenden Stichprobe, ob der Besitz eines Computers und das Alter stochastisch unabhängig sind. Die Stichprobe ergab sich aus einer Befragung in den USA:

Besitz eines	Alter		Summe
Computers	≤ 50	51+	
nein	860	961	
ja	1 969	1 210	
Summe			

Gehen Sie wie folgt vor:

1. Wie heißt der Test?
2. Wie lautet die Nullhypothese des Tests?
3. Überprüfen Sie, ob die Faustregel des Tests erfüllt ist.

4. Berechnen Sie den empirischen Wert der Teststatistik.

5. Wie lautet die Testentscheidung aufgrund der obigen Stichprobe? (Begründung!) Interpretieren Sie in knappen Worten das Ergebnis.

Lösung zu Aufgabe 1

a) p=Anteil der Fahrten unter Alkoholeinfluss bei einem groben Verstoß gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung
96%-Punkt der NV ist 1,7507

1. $n \geq \dfrac{1{,}7507^2 \cdot 0{,}25}{0{,}05^2} = 306{,}495$
d.h. es sind mindestens 307 grobe Verstöße gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung auf Alkoholkonsum zu untersuchen.
2. Faustregel $n = 440 \geq 100$ erfüllt.
0,92-KI für $p = \dfrac{88}{440} \pm 1{,}7507 \cdot \sqrt{\dfrac{\frac{88}{440} \cdot \frac{352}{440}}{440}} = 0{,}2 \pm 0{,}03338454 = [0{,}17; 0{,}23]$
d.h. [17%;23%] ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem p mit einer Wahrscheinlichkeit von 92% liegt.

b) X=Anzahl der Fahrer mit einem groben Verstoß gegen eine Geschwindigkeitsbegrenzung, die zudem noch unter Alkoholeinfluss stehen
$X \sim \mathsf{B}(n = 10; p = 0{,}2)$

1. $P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{10} = 0{,}1074$
2. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}1074 + \binom{10}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^9 + \binom{10}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^8 = 0{,}1074 + 0{,}2684 + 0{,}3020 = 0{,}6778$
3. $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}1074 - 0{,}2684 = 1 - 0{,}3758 = 0{,}6242$

Lösung zu Aufgabe 2
X=Altersklasse (bis 50 Jahre, 51 Jahre oder älter)
Y=Besitz eines Computers (nein, ja)

Besitz eines Computers	Alter ≤ 50	Alter 51+	Summe
nein	860 1 030,3	961 790,7	1 821
ja	1 969 1 798,7	1 210 1 380,3	3 179
Summe	2 829	2 171	5 000

1. Der Test heißt Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest.

2. H_0: Besitz eines Computers und Altersklasse sind stochastisch unabhängig

3. df=1
minimale erwartete Häufigkeit $= 790{,}7 \geq 1$ okay
Keine Zelle hat eine erwartete Häufigkeit kleiner als fünf, maximal 20% aller Zellen wären hier erlaubt gewesen.
Die Faustregel ist erfüllt.

4. $\chi^2_{\text{emp.}} = \dfrac{(\mid 860 - 1\,030{,}3 \mid -0{,}5)^2}{1\,030{,}3} + \dfrac{(\mid 961 - 790{,}37 \mid -0{,}5)^2}{790{,}7} + \dfrac{(\mid 1\,969 - 1\,798{,}7 \mid -0{,}5)^2}{1\,798{,}7} + \dfrac{(\mid 1\,210 - 1\,380{,}3 \mid -0{,}5)^2}{1\,380{,}3} = 27{,}98412 + 36{,}46394 + 16{,}02938 + 20{,}88824 = 101{,}392$

5. $\chi^2_{\text{emp.}} = 101{,}392 > 3{,}841$
d.h. Ablehnung von H_0; d.h. der Besitz eines Computers und das Alter sind nicht stochastisch unabhängig.

Wirtschaftsstatistik-Klausur am 30.01.2018

Aufgabe 1

Die tatsächliche Anzahl von Aufträgen pro Monat eines Pizza-Services kann annähernd als normalverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $\mu = 2000$ und $\sigma = 100$ angesehen werden.

a) Wie groß ist ungefähr die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2000 Aufträge pro Monat beim Pizza-Service eingehen?

b) Wie hoch ist ungefähr die monatliche Anzahl von Aufträgen, die mit Wahrscheinlichkeit 0,90 nicht überschritten wird?

Aufgabe 2

Von je 1 000 Rentnerinnen bzw. Rentnern bekommen in Deutschland eine monatliche Rente:

von	Frauen	Männer
unter 150 Euro	112	45
150 bis unter 300	187	44
300 bis unter 450	131	42
450 bis unter 600	162	52
600 bis unter 750	196	78
750 bis unter 900	112	113
900 bis unter 1 200	77	299
1 200 bis unter 1 500	20	226
1 500 Euro und mehr	3	101

Stand: Ende 2002
Quelle: VDR

a) Vergleichen Sie das Rentenniveau von Rentnerinnen und Rentnern anhand einer statistischen Maßzahl. Welches Geschlecht bezieht die höhere Rente?

b) Vergleichen Sie die Rentenunterschiede bei den Männern mit den Rentenunterschieden bei den Frauen. Bei welchem Geschlecht sind die Unterschiede stärker?

Lösung zu Aufgabe 1

a) $P(X > 2000) = 0{,}5$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 50%.

b)
$$\begin{aligned} 0{,}90 &= P(X < x) = F_U\left(\frac{x-2000}{100}\right) \\ 1{,}28 &= \frac{x-2000}{100} \\ x &= 2000 + 1{,}28 \cdot 100 = 2\,128 \end{aligned}$$
d.h. die gesuchte monatliche Anzahl von Aufträgen beträgt 2 128.

Lösung zu Aufgabe 2

X = Rentenhöhe (in Euro) einer Frau
Y = Rentenhöhe (in Euro) eines Mannes

von	Frauen	Männer	F_{Frauen}	$F_{\text{Männer}}$
unter 150 Euro	112	45	0,112	0,045
150 bis unter 300	187	44	0,299	0,089
300 bis unter 450	131	42	0,430	0,131
450 bis unter 600	162	52	0,592	0,183
600 bis unter 750	196	78	0,788	0,261
750 bis unter 900	112	113	0,900	0,374
900 bis unter 1 200	77	299	0,977	0,673
1 200 bis unter 1 500	20	226	0,997	0,899
1 500 Euro und mehr	3	101	1,000	1,000

a) $x_{0,50} \approx 450 + 150 \cdot \dfrac{0{,}50 - 0{,}430}{0{,}162} = 514{,}82$

$y_{0,50} \approx 900 + 300 \cdot \dfrac{0{,}50 - 0{,}374}{0{,}299} = 1\,026{,}42$

d.h. etwa 50% aller Rentnerinnen bezieht höchstens ca. 515 Euro monatliche Rente, während etwa 50% aller Rentnern mindestens ca. 1026 Euro monatliche Rente beziehen.
Das Rentenniveau ist bei den Männern etwa doppelt so hoch.

b) $x_{0,25} \approx 150 + 150 \cdot \dfrac{0{,}25 - 0{,}112}{0{,}187} = 260{,}70$

$x_{0,75} \approx 600 + 150 \cdot \dfrac{0{,}75 - 0{,}592}{0{,}196} = 720{,}92$

Relativer Quartilsabstand: $\dfrac{x_{0,75} - x_{0,25}}{x_{0,50}} \approx \dfrac{720{,}92 - 260{,}70}{514{,}82} = 0{,}8939$

d.h. die relative Streuung der Rentenhöhe der Frauen beträgt etwa 0,90.

$y_{0,25} \approx 600 + 150 \cdot \dfrac{0{,}25 - 0{,}183}{0{,}078} = 728{,}85$

$y_{0,75} \approx 1\,200 + 300 \cdot \dfrac{0{,}75 - 0{,}673}{0{,}226} = 1\,302{,}21$

Relativer Quartilsabstand: $\dfrac{y_{0,75} - y_{0,25}}{y_{0,50}} \approx \dfrac{1\,302{,}21 - 728{,}85}{1\,026{,}42} = 0{,}5586$

d.h. die relative Streuung der Rentenhöhe der Männer beträgt etwa 0,56.
Die Unterschiede der einzelnen Rentenhöhen sind bei den Frauen stärker.