12.) Schätzen von Parametern

29.04.19

12.1.) Spezielle Stichprobenfunktionen

Bsp:

X = Nachbereitungszeit (in h pro Woche) einer Vorlesung

drei Stichproben I, II, III

I	II	III
2	5	6
8	4	5
5	9	7
3	1	5
4	0	8
0	4	5
6	7	0
2	2	9
3		3
4		2
6		
5		
$n=12$	$n=8$	$n=10$

Stichprobe	n	$\bar{x}$	S^2	S
I	12	4	$4{,}\overline{3}$	2,1
II	8	4	8	2,8
III	10	5	6,8	2,6

Varianz

$$S^2 = \frac{1}{12}\left[(2-4)^2 + (8-4)^2 + \ldots + (5-4)^2\right]$$

12.2.) Schwaches Gesetz der Großen Zahlen

29.04.19

Die Whd., dass sich bei wachsenden Stichprobenumfang $\overline{x}$ und $E[x]$ nicht unterscheiden, beträgt eins.

Bsp:

$\overline{x} = p$ = Anteil der Mädchengeburten in der BRD in der Stichprobe

μ	III
J	II

$60\% = 0{,}6 = \frac{3}{5}$

p = Anteil der Mädchengeburten in der Grundgesamtheit $= 0{,}487 = 48{,}7\%$

Je größer der Stichprobenumfang, desto wahrscheinlicher ist es, dass der Anteil in der Stichprobe nicht mehr von 48,7% unterscheidet.

12.3.) Schätzen von Parametern

μ wird durch $\overline{x}$ geschätzt und σ^2 wird durch S^2 geschätzt

13.) Konfidenzintervalle

$\mu = E[x]$ Erwartungswert

13.1.) KI für μ, falls σ bekannt

Problem: $E[x] = \mu$ = mittlere Nachbereitungszeit eines Stud. ist bekannt.

Lösung: μ wird durch $\overline{x}$ geschätzt,

Schätzer für μ: $4h_{bzw.}$ $4h_{bzw.}$ $5h$

Frage: Ist z.B. $\bar{x} = 4$ ein guter oder ein schlechter Schätzwert für μ? 29.04.19

Antwort: Es wird ein Intervall für μ berechnet, in dem μ mit „hoher" Wht. liegt.
Ist das Intervall schmal, so ist $\bar{x}$ ein präziser Schätzwert für μ.
Ist hingegen das Intervall „breit", so ist $\bar{x}$ ein unpräziser Schätzwert für μ.

„hohe" Wht., dh.: $\boxed{90\% \text{ oder } 95\% \text{ oder } 99\%}$

0,95 - KI für μ =
$$\left[\bar{x} - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

falls $X \sim N(\mu ; \sigma = \text{bekannt})$

Bsp:

μ = mittlere Nachbereitungszeit

X = Nachbereitungszeit eines Stud.

$X \sim N(\mu ; \sigma = 2{,}5)$

$\bar{x} \pm 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ → Formelsammlung

* 2,8 / 4 = 0,7 = 70%
→ unpräziser Schätzer

0,95 - KI	Breite	Stichprobe
[2,59 ; 5,41]	2,8*	I
[2,27 ; 5,73]	3,5	II
[3,45 ; 6,55]	3,1	III

I $4 \pm 1{,}96 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{12}}$

II $4 \pm 1{,}96 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{8}}$

III $5 \pm 1{,}96 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{10}}$

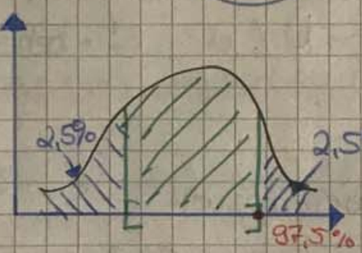
d.h. $\bar{x}=4$ bzw. $\bar{x}=4$ bzw. $\bar{x}=5$ sind schlechte Schätzwerte für μ.

Wird der Stichprobenumfang n vergrößert, so wird das KI schmäler.

Woher kommt der Wert $u = 1{,}96$?

Konfidenzniveau $= 1-\alpha$

$1-\alpha$	90%	95%	99%
α	10%	5%	1%
$\alpha/2$	5%	2,5%	0,5%
$1-\alpha/2$	95%	97,5%	99,5%
$u_{1-\alpha/2}$	1,6449	1,96	2,5758



$n\uparrow \rightarrow$ KI schmäler

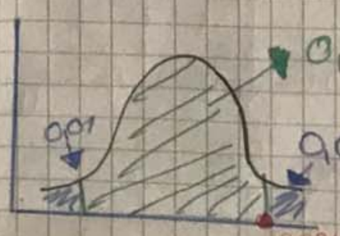
$(1-\alpha)\uparrow \rightarrow$ KI breiter

100% − KI für $\mu = [0 ; +\infty)$

Bsp.: (Fortsetzungen)

gesucht: 0,98 − KI für μ

I. Stichprobe



99%-Punkt = 2,3263

$$4 \pm 2{,}3263 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{12}} = [2{,}32\,;\,5{,}68]$$

Breite $= 5{,}68 - 2{,}32 = 3{,}36$

13.2) KI für μ, falls σ unbekannt

$$\boxed{\begin{array}{l} 0{,}95\text{-KI für } \mu \\ \bar{x} \pm 1{,}96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \\ \text{falls } n \geq 30 \end{array}}$$

S. 12.1.

Bsp: x = Nachbereitungszeit

μ = mittlere Nachbereitungszeit

$0{,}96$-KI für μ = ?

1. + 2. + 3. Stichprobe: $\bar{x} = 4{,}\bar{3}$ h und $s = 2{,}52$ h

$$4{,}\bar{3} \pm 2{,}0537 \cdot \frac{2{,}52}{\sqrt{30}} =$$

$[3{,}39\,;\,5{,}28]$

Faustregel: $n = 30 \geq 30$ erfüllt.

$[3{,}4\text{h}\,;\,5{,}3\text{h}]$ ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem die mittlere Nachbereitungszeit eines Std. mit der Wkt. von 96 % liegt.