

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM 1 (Wirtschaftsmathematik)

Vorkenntnisse

Aufgabe 0.1

Sei $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ eine Menge von Tätigkeiten, die von einer Menge $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ von Angestellten zu erledigen sind. Mit der Wertetabelle

a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$f_1(a_i)$	b_1		b_2	b_3		b_4
$f_2(a_i)$	b_1, b_2	b_1	b_3	b_4	b_1	b_3
$f_3(a_i)$	b_4	b_4	b_4	b_4	b_4	b_4
$f_4(a_i)$	b_4	b_1	b_2	b_3	b_3	b_3

werden Zuordnungsvorschriften f_1, f_2, f_3, f_4 beschrieben. Welche der vier Zuordnungsvorschriften sind Abbildungen von A nach B ?

Aufgabe 0.2

Es seien $p =$ Verkaufspreis (in Geldeinheiten) und $x =$ abgesetzte Menge (in Mengeneinheiten) eines Produkts. Bestimmen Sie

- den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich
- den Wertebereich
- die Umkehrabbildung

der folgenden Preis-Absatz-Funktion $x(p) = 160 - \frac{p}{4}$

Aufgabe 0.3

Es seien $p =$ Verkaufspreis (in Geldeinheiten) und $x =$ abgesetzte Menge (in Mengeneinheiten) eines Produkts. Bestimmen Sie

- den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich
- den Wertebereich
- die Umkehrabbildung

der folgenden Preis-Absatz-Funktion $p(x) = 700 - \frac{1}{23}x$.

Aufgabe 0.4

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \left(1 + \frac{8}{100}\right)^5$. Berechnen Sie den Wert x mit $f(x) = 2938,66$.

b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3000 \left(1 + \frac{x}{100}\right)^7$. Berechnen Sie den Wert x

mit $f(x) = 4\,221,30$.

- c) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2\,500 \left(1 + \frac{7}{100}\right)^x$. Berechnen Sie den Wert x mit $f(x) = 3\,751,83$.

Aufgabe 0.5

Ein monopolistisches Ein-Produkt-Unternehmen produziert seine Ausbringungsmenge x (in ME) mit Hilfe eines einzigen Produktionsfaktors r (in ME) gemäß folgender Produktionsfunktion:

$$x(r) = 5 \cdot \sqrt{r-1} \quad ; r \geq 1$$

Für jede eingesetzte Mengeneinheit des Produktionsfaktors fallen 200 Geldeinheiten an Kosten an. Weitere Kosten entstehen dem Unternehmen für die Produktion des Produktes nicht. Die Ausbringungsmenge x kann am Markt abgesetzt werden entsprechend der Preis-Absatz Funktion:

$$x(p) = 60 - 0,75 \cdot p \quad ; p \in [0; 80]$$

wobei p den Verkaufspreis pro ME bezeichnet.

- a) Berechnen Sie die Preis-Absatz Funktion $p(x)$ und geben Sie den Definitionsbereich an.
- b) Zeigen Sie, dass sich für die Kostenfunktion $K(x) = 8x^2 + 200$ ergibt.

Aufgabe 0.6

Bestimmen Sie die Lösungsmenge \mathbb{L} des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x + y = 8 \\ \text{II} \quad 2x + 5y = 31 \end{array}$$

Aufgabe 0.7

Bestimmen Sie die Lösungsmenge \mathbb{L} des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x + y = 8 \\ \text{II} \quad 5x + 5y = 31 \end{array}$$

Aufgabe 0.8

Bestimmen Sie die Lösungsmenge \mathbb{L} des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x + y = 8 \\ \text{II} \quad 5x + 5y = 40 \end{array}$$

Aufgabe 0.9

Süddeutsche vom 31.08.2016, Seite 1: Apple muss Steuern nachzahlen. Die EU-Kommission in Brüssel bezeichnete die von der irischen Regierung gewährten jahrelangen Steuervergünstigungen als illegale Staatshilfe zu Lasten von Konkurrenz-Unternehmen. Demnach musste Apple in Irland auf seine Gewinne zuletzt nur noch 0,005 Prozent Körperschaftsteuer bezahlen.

In Irland beträgt der Körperschaftsteuersatz (kurz: KSt-Satz) 12,5 Prozent für gewerbliches Einkommen.

- a) Wie hoch ist bei einem KSt-Satz von 0,005 Prozent der Steuerbetrag (in Milliarden US-Dollar) bei folgenden Gewinnen (in Milliarden US-Dollar)?

Gewinn	Steuerbetrag
100 000 \$	
1 Mio \$	
1 Milliarde \$	

- b) Im Jahr 2015 betrug laut Forbes der Gewinn von Apple 53,7 Milliarden US-Dollar. Angenommen dieser Gewinn würde nur in Irland versteuert werden.
1. Welchen Steuerbetrag hätte Apple im Jahr 2015 in Irland bezahlt bei einem KSt-Satz von 0,005 Prozent?
 2. Welchen Steuerbetrag hätte Apple im Jahr 2015 zahlen müssen bei einem KSt-Satz von 12,5 Prozent?

Lösung zu Aufgabe 0.1

f_1 ist keine Abbildung, da die Elemente a_2 und a_5 kein Bild besitzen.

f_2 ist keine Abbildung, da das Element a_1 zwei Bilder besitzt.

f_3 und f_4 sind Abbildungen.

Lösung zu Aufgabe 0.2

a) Der Definitionsbereich von $x(p)$ ist das Intervall $[0; 640]$

b) Der Wertebereich von $x(p)$ ist das Intervall $[0; 160]$

c) $p(x) = 640 - 4x ; x \in [0; 160]$

Lösung zu Aufgabe 0.3

a) Der Definitionsbereich von $p(x)$ ist das Intervall $[0; 16\ 100]$

b) Der Wertebereich von $p(x)$ ist das Intervall $[0; 700]$

c) $x(p) = 16\ 100 - 23p ; p \in [0; 700]$

Lösung zu Aufgabe 0.4

$$\begin{aligned} \text{a) } x \left(1 + \frac{8}{100}\right)^5 &= 2\ 938,66 \\ x \cdot 1,08^5 &= 2\ 938,66 \\ x &= \frac{2\ 938,66}{1,08^5} \approx 2\ 000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3000 \left(1 + \frac{x}{100}\right)^7 &= 4\ 221,30 \\ \left(1 + \frac{x}{100}\right)^7 &= \frac{4\ 221,30}{3\ 000} \\ 1 + \frac{x}{100} &= \sqrt[7]{\frac{4\ 221,30}{3\ 000}} = 1,05 \\ \frac{x}{100} &= 1,05 - 1 = 0,05 \\ x &= 100 \cdot 0,05 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 2\ 500 \left(1 + \frac{7}{100}\right) &= 3\ 751,83 \\ 1,07^x &= \frac{3\ 751,83}{2\ 500} \\ x &= \log_{1,07} \frac{3\ 751,83}{2\ 500} = \frac{\ln \frac{3\ 751,83}{2\ 500}}{\ln 1,07} \approx 6 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 0.5

$$\text{a) } \begin{array}{c|c} p & x \\ \hline 0 & 60 \\ 80 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = 80 - \frac{4}{3}x ; x \in [0; 60]$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } \quad x = 5\sqrt{r-1} \quad | \div 5 \\ \quad 0,2x = \sqrt{r-1} \quad | \text{quadrieren} \\ \quad 0,04x^2 = r-1 \quad | +1 \\ \quad 1 + 0,04x^2 = r \end{array}$$

$$K(x) = 200 \cdot r = 200 \cdot (1 + 0,04x^2) = 200 + 8x^2 ; x \in [0; \infty)$$

Lösung zu Aufgabe 0.6

$$\mathbb{L} = \left\{ \binom{3}{5} \right\}.$$

Lösung zu Aufgabe 0.7

$$\mathbb{L} = \emptyset.$$

Lösung zu Aufgabe 0.8

$$\mathbb{L} = \left\{ \binom{x}{8-x}; x \in \mathbb{R} \right\} \text{ oder } \mathbb{L} = \left\{ \binom{8-y}{y}; y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung zu Aufgabe 0.9

$$\begin{array}{l} \text{a) } 100\,000 \cdot 0,005/100 = 100\,000 \cdot 0,00005 = 5 \\ 1\,000\,000 \cdot 0,00005 = 50 \\ 1\,000\,000\,000 \cdot 0,00005 = 50\,000 \end{array}$$

Gewinn	Steuerbetrag
100 000 \$	5 \$
1 Mio \$	50 \$
1 Milliarde \$	50 000 \$

- b) 1. $53\,700\,000\,000 \cdot 0,00005 = 2\,685\,000$
d.h. im Jahr 2015 hätte Apple in Irland 2,685 Mio US-Dollar an Körperschaftsteuer bezahlt.
2. $53\,700\,000\,000 \cdot 0,125 = 6\,712\,500\,000$
d.h. im Jahr 2015 hätte Apple eigentlich in Irland 6,7125 Mrd US-Dollar an Körperschaftsteuer bezahlen müssen.

Aufgabe 0.9

Süddeutsche vom 31.08.2016, Seite 1: Apple muss Steuern nachzahlen. Die EU-Kommission in Brüssel bezeichnete die von der irischen Regierung gewährten jahrelangen Steuervergünstigungen als illegale Staatshilfe zu Lasten von Konkurrenz-Unternehmen. Demnach musste Apple in Irland auf seine Gewinne zuletzt nur noch 0,005 Prozent Körperschaftsteuer bezahlen.

In Irland beträgt der Körperschaftsteuersatz (kurz: KSt-Satz) 12,5 Prozent für gewerbliches Einkommen.

- a) Wie hoch ist bei einem KSt-Satz von 0,005 Prozent der Steuerbetrag (in Milliarden US-Dollar) bei folgenden Gewinnen (in Milliarden US-Dollar)?

Gewinn	Steuerbetrag
100 000 \$	
1 Mio \$	
1 Milliarde \$	

- b) Im Jahr 2015 betrug laut Forbes der Gewinn von Apple 53,7 Milliarden US-Dollar. Angenommen dieser Gewinn würde nur in Irland versteuert werden.

1. Welchen Steuerbetrag hätte Apple im Jahr 2015 in Irland bezahlt bei einem KSt-Satz von 0,005 Prozent?
2. Welchen Steuerbetrag hätte Apple im Jahr 2015 zahlen müssen bei einem KSt-Satz von 12,5 Prozent?

Lösung zu Aufgabe 0.9

- a) $100\,000 \cdot 0,005/100 = 100\,000 \cdot 0,00005 = 5$
 $1\,000\,000 \cdot 0,00005 = 50$
 $1\,000\,000\,000 \cdot 0,00005 = 50\,000$

Gewinn	Steuerbetrag
100 000 \$	5 \$
1 Mio \$	50 \$
1 Milliarde \$	50 000 \$

- b) 1. $53\,700\,000\,000 \cdot 0,00005 = 2\,685\,000$
d.h. im Jahr 2015 hätte Apple in Irland 2,685 Mio US-Dollar an Körperschaftsteuer bezahlt.
2. $53\,700\,000\,000 \cdot 0,125 = 6\,712\,500\,000$
d.h. im Jahr 2015 hätte Apple eigentlich in Irland 6,7125 Mrd US-Dollar an Körperschaftsteuer bezahlen müssen.