Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen QM I (Wirtschaftsmathematik)

Vektoren und Matrizen

Aufgabe 1.1
Gegeben sind folgende Vektoren:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -e \\ 36 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 43^0 \\ e - 2e \\ 6^2 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} 1 \\ e^2 \\ 36 \end{pmatrix} \text{ und } x = \begin{pmatrix} 1 \\ -e \\ 36 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Welche der Vektoren a, b, c, x sind gleich? (Die Zahl e ist die Eulersche Zahl 2,71828…)

Aufgabe 1.2
In drei Werken W_1, W_2, W_3 werden die vier Produkte P_1, P_2, P_3, P_4 hergestellt. Die täglichen Produktionsmengen (in Megeneinheiten) der einzelnen Werken betragen:

	Werk 1
P_1	10
P_2	20
P_3	30
P_4	40

	Werk 2
P_1	12
P_2	24
P_3	33
P_4	48

	Werk 3
P_1	11
P_2	22
P_3	36
P_4	44

a) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 33 \\ 48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 36 \\ 44 \end{pmatrix}$
Und interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Einem Großabnehmer werden täglich jeweils 20 ME eines jeden der vier Produkte geliefert. Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 33 \\ 48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 36 \\ 44 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$
Und interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Berechnen Sie $\frac{1}{3} \cdot [\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 33 \\ 48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 36 \\ 44 \end{pmatrix}]$
Und interpretieren Sie das Ergebnis.

d) Ein weiteres Werk W_4 stellt täglich die dreifache Menge von Werk W_1 her. Wie viele Mengeneinheiten der einzelnen Produkte werden im Werk W_4 täglich produziert?

Aufgabe 1.3
Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ -3 & 0 & -7 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ -7 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie:

CA
AD
$CA - 2CB$
$C(B - 3A) + 4CA$
$(A - 3B)D - 2AD$
DB^t

Aufgabe 1.4

Gegeben sind $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 5/2 & -1 & 5/3 & -1/3 \\ -3/2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4/3 & 1/3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} 27 \\ \pi \\ -\sqrt{2} \\ -33 \end{bmatrix}.$

Berechnen Sie $(A \cdot B) \cdot x$.

Aufgabe 1.5

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ -3 & 0 & -7 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ -7 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Welche der Berechnungen

CA
AD
$CA - 2CB$
$C(B - 3A) + 4CA$
$(A - 3B)D - 2AD$
DB^t

lassen sich vereinfachen? Und wie sieht die mögliche Vereinfachung aus?

Aufgabe 1.6

Seien $a^t = (-1, 2, -3)$ und $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie a^tA, a^tAa, a^ta, aa^t und a^tAA^ta.

Aufgabe 1.7

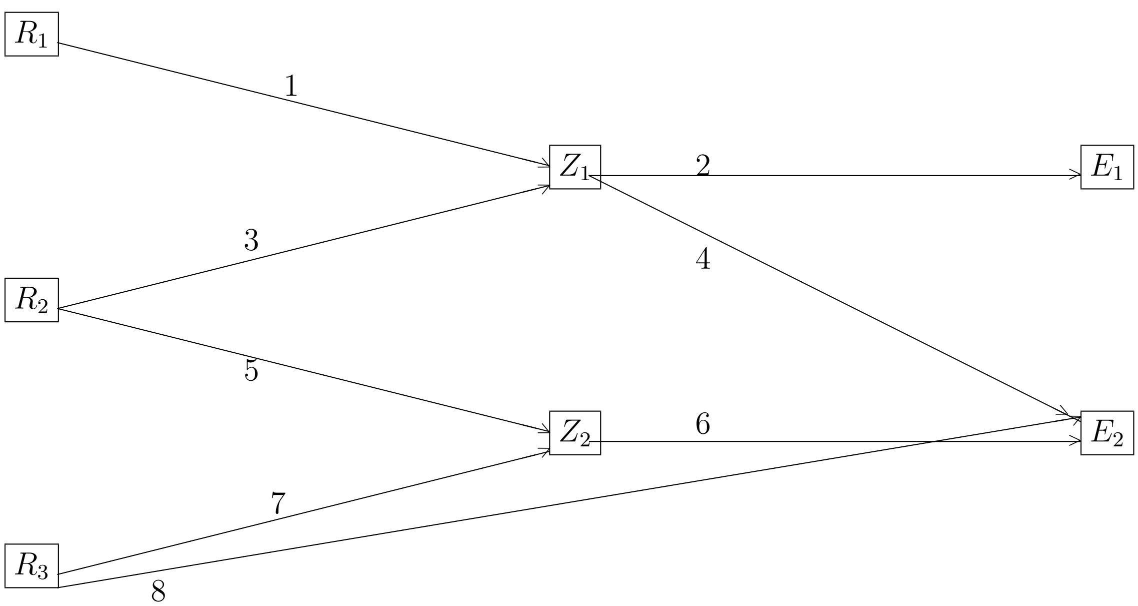
Seien $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ -3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0{,}5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ gegeben.

Berechnen Sie AB, Ax, $A(2x-y)$, y^tA^tx, $A+C$.

Aufgabe 1.8

Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und den Zwischenprodukten Z_1, Z_2 in einem zweistufigen Produktionsprozess die Endprodukte E_1, E_2 her. Der Produktionszusammenhang wird durch folgende Materialfluss-Grafik wiedergegeben:



a) Stellen Sie den Sachverhalt durch Produktionsmatrizen dar.

b) Geben Sie den Gesamtbedarf von R_1, R_2, R_3 für jeweils ein Stück E_1 bzw. E_2 in Form einer Matrix an.

c) Welcher Rohstoffbedarf ist für die Produktion von drei Stück E_1 und fünf Stück E_2 erforderlich?

d) Angenommen der Materialfluss ändert sich wie folgt: Für ein Stück Z_1 sind zusätzlich zwei Stück Z_2 erforderlich. Wie lauten dann die Ergebnisse unter b) und c)?

Lösung zu Aufgabe 1.1
Lediglich die Vektoren a und b sind gleich: $a = b$

Lösung zu Aufgabe 1.2

a) Gesamte tägliche Produktionsmenge der drei Werke an Produkten P_1, P_2, P_3, P_4
$$\begin{pmatrix} 33 \\ 66 \\ 99 \\ 132 \end{pmatrix}$$

b) Vorrat der vier Produkte in den drei Werken zusammen, nachdem der Großabnehmer beliefert wurde
$$\begin{pmatrix} 13 \\ 46 \\ 79 \\ 112 \end{pmatrix}$$

c) Durchschnittliche Produktionsmenge der einzelnen Produkte pro Werk
$$\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \\ 44 \end{pmatrix}$$

d) ME von P_1, P_2, P_3, P_4 in Werk 4
$$\begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 90 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 1.3

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 49 & 1 \\ 0 & 14 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot D = \begin{bmatrix} 27 & -36 & -8 \\ 17 & -21 & -40 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{bmatrix} -16 & -30 & -74 \\ -5 & -6 & -19 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot A - 2 \cdot C \cdot B = \begin{bmatrix} 35 & 109 & 149 \\ 10 & 26 & 37 \end{bmatrix}$$

$$B - 3 \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 14 \\ 0 & -21 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot (B - 3 \cdot A) = \begin{bmatrix} -25 & -177 & -77 \\ -5 & -48 & -16 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot (B - 3A) + 4C \cdot A = \begin{bmatrix} -13 & 19 & -73 \\ -5 & 8 & -20 \end{bmatrix}$$

$$A - 3 \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -18 & -18 \\ 8 & 7 & 19 \end{bmatrix}$$

$$(A - 3 \cdot B) \cdot D = \begin{bmatrix} 123 & -99 & 55 \\ -157 & 186 & 11 \end{bmatrix}$$

$$(A - 3B) \cdot D - 2 \cdot A \cdot D = \begin{bmatrix} 69 & -27 & 71 \\ -191 & 228 & 91 \end{bmatrix}$$

$$D \cdot B^t = \begin{bmatrix} 62 & 2 \\ -25 & 35 \\ 53 & 7 \end{bmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 1.4

Da das Produkt $A \cdot B$ die Einheitsmatrix ergibt, ist $A \cdot B \cdot x = x$

Lösung zu Aufgabe 1.5

$CA - 2CB = C(A - 2B)$

$C(B - 3A) + 4CA = CB - 3CA + 4CA = CB + CA = C(B + A) = C(A + B)$

$(A - 3B)D - 2AD = AD - 3BD - 2AD = -AD - 3BD = (-A - 3B)D$

Lösung zu Aufgabe 1.6

$$a^tA = \begin{array}{rrr|rrr} & & & -1 & -1 & 1 \\ & & & -1 & 0 & -1 \\ & & & 1 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 2 & -3 & -4 & 4 & -6 \end{array} = [-4, 4, -6]$$

$$a^tAa = \begin{array}{rrr|r} & & & -1 \\ & & & 2 \\ & & & -3 \\ \hline -4 & 4 & 6 & 30 \end{array} = [30]$$

$$a^ta = \begin{array}{rrr|r} & & & -1 \\ & & & 2 \\ & & & -3 \\ \hline -1 & 2 & -3 & 14 \end{array} = [14]$$

$$aa^t = \begin{array}{r|rrr} & -1 & 2 & -3 \\ \hline -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -6 & 9 \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$a^tAA^t = \begin{array}{rrr|rrr} & & & -1 & -1 & 1 \\ & & & -1 & 0 & -1 \\ & & & 1 & -1 & 1 \\ \hline -4 & 4 & -6 & -6 & 10 & -14 \end{array} = [-6, 10, -14]$$

$$a^t A A^t a = \begin{array}{ccc|c} & & & -1 \\ & & & 2 \\ & & & -3 \\ \hline -6 & 10 & -14 & 68 \end{array} = [68]$$

Lösung zu Aufgabe 1.7

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 0{,}5 & 6 & 4 \\ -6 & -4 & -2 & 1 \\ -1 & -3{,}5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$2x - y = \begin{bmatrix} 3 \\ -2{,}5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot (2x - y) = \begin{bmatrix} 20 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$y^t \cdot A^t = [0, 0, 0]$$

$$y^t \cdot A^t \cdot x = 0$$

$$A + C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 1.8:

a) Direktbedarf A (in ME) an Rohmaterial für jeweils eine ME der Zwischenprodukte:

	Z_1	Z_2
R_1	1	0
R_2	3	5
R_3	0	7

Direktbedarf B (in ME) an Zwischenprodukten für jeweils eine ME der Endprodukte:

	E_1	E_2
Z_1	2	4
Z_2	0	6

Direktbedarf C (in ME) an Rohmaterial für jeweils eine ME der Endprodukte:

	E_1	E_2
R_1	0	0
R_2	0	0
R_3	0	8

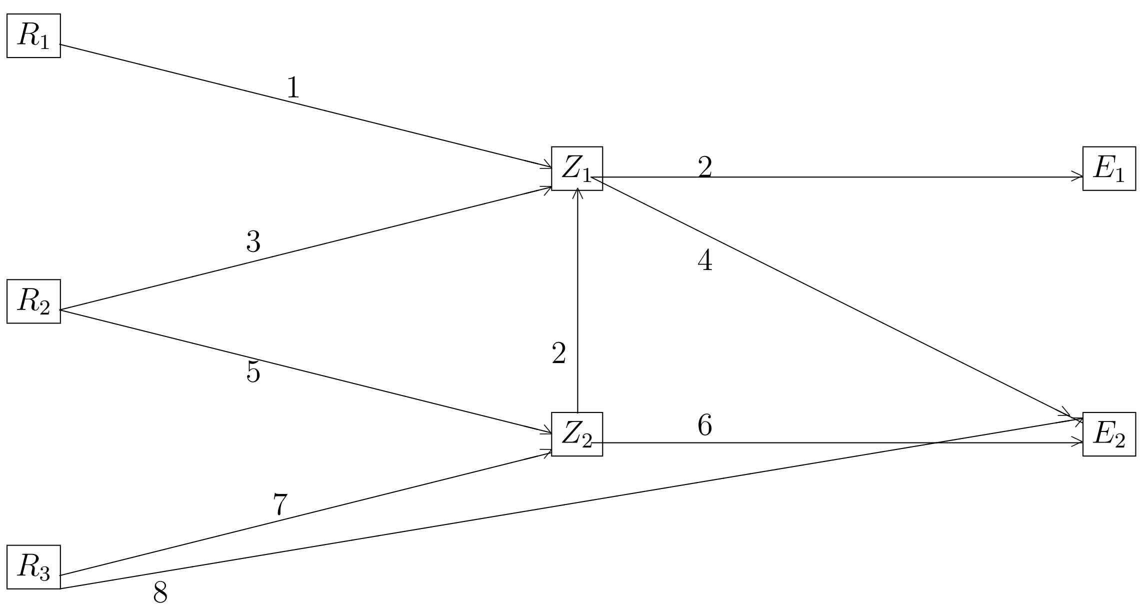
b) Gesamtbedarf $M = A \cdot B + C$ (in ME) an Rohmaterial für jeweils eine ME der Endprodukte:

	E_1	E_2
R_1	2	4
R_2	6	42
R_3	0	50

c) $M \cdot \binom{3}{5} = \begin{bmatrix} 26 \\ 228 \\ 250 \end{bmatrix}$

d.h. es werden 26 ME von R_1, 228 ME von R_2 und 250 ME von R_3 benötigt.

d) Materialflussgrafik:



Durch Abfahren der Pfade in der Materialflussgrafik ergibt sich der Gesamtbedarf M. So lautet z.B. der Weg von R_2 zu E_1: $3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot 2 = 26$. Oder von R_2 zu E_2: $5 \cdot 6 + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 82$

	E_1	E_2
R_1	2	4
R_2	26	82
R_3	28	106

$M \cdot \binom{3}{5} = \begin{bmatrix} 26 \\ 488 \\ 614 \end{bmatrix}$

d.h. es werden 26 ME von R_1, 488 ME von R_2 und 614 ME von R_3 benötigt.

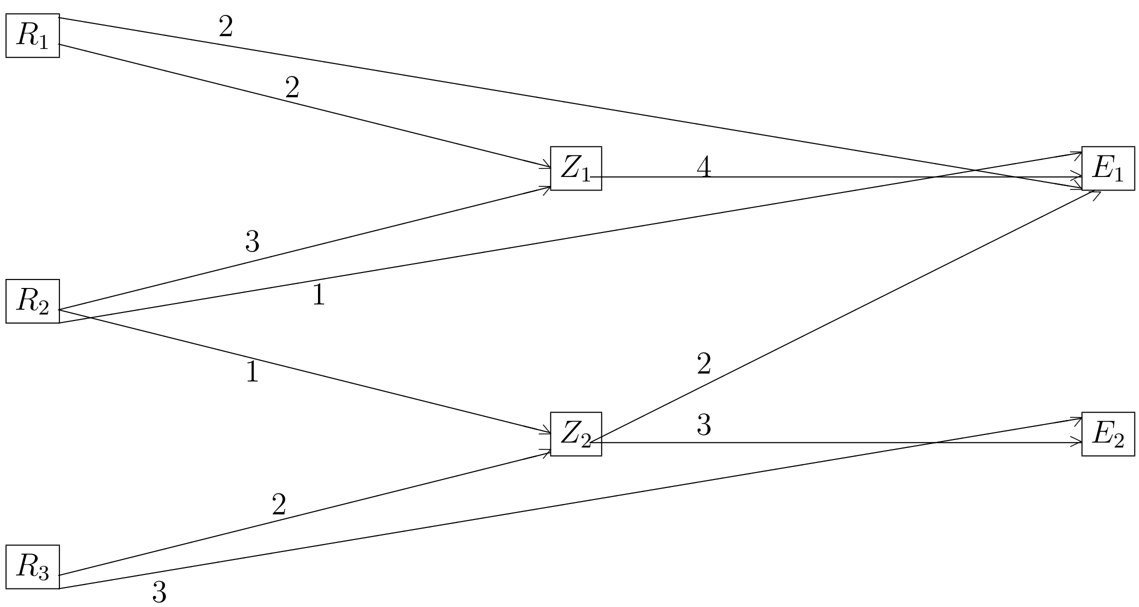
Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Vorlesung QM I (Wirtschaftsmathematik)

Arbeitsblatt

Beispiel

Häufig werden Erzeugnisse über mehrere Stufen hergestellt, d.h. man fertigt zunächst aus Rohmaterial R_1, R_2, R_3 Teile (Zwischenprodukte Z_1, Z_2), setzt diese zu Baugruppen zusammen und stellt anschließend in der Endmontage das Enderzeugnis (Endprodukte E_1, E_2) her. Dieser Vorgang wird bildlich durch eine Materialfluss-Grafik (Gozintograph; aus dem Englischen abgeleitet: *the part that goes into*) dargestellt. In diesem Grafen werden Produkte als Knoten und die zwischen ihnen bestehenden Materialverpflechtungen durch Pfeile beschrieben. Die Zahlen an den Pfeilen geben an, wie viele Mengeneinheiten (ME) eines Vorprodukts zur Fertigung einer Mengeneinheit des direkt übergeordneten Produkts benötigt werden. Diese Zahlen nennt man **Stücklisten-** oder **Inputkoeffizienten**.



Wie viele Mengeneinheit von R_1, R_2, R_3 werden benötigt, um 100 ME von E_1 und 200 ME von E_2 herzustellen?