Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen QM I (Wirtschaftsmathematik)

Elastizitäten und Monotonie

Aufgabe 7.1

Für die Absatzmenge x (in ME) und dem Verkaufspreis p (in GE pro ME) lautet die Preis-Absatz Funktion eines bestimmten Unternehmens wie folgt:

$$p(x) = \frac{500}{x+20} \;\; ; x \in \mathbb{R}_0^+$$

a) Bestimmen Sie die umgekehrte Preis-Absatz Funktion $x(p) \;\; ; p \in (0; 25)$.

b) Wie verändert sich die Absatzmenge, wenn der Verkaufspreis von 5 GE pro ME um 1% erhöht wird?

c) Wie verändert sich die Absatzmenge, wenn der Verkaufspreis von 20 GE pro ME um 1% erhöht wird?

Aufgabe 7.2

Ein Unternehmen kann ein Produkt entsprechend der Produktionsfunktion

$$x(r) = 10 \cdot \sqrt[3]{r^2} - 40 \;\; ; r \geq 8$$

herstellen, wobei

$x(r)$ = hergestellte Menge

r = Einsatzmenge eines Produktionsfaktors

bezeichnen.

Die erste Ableitung dieser Funktion nennt man **Grenzproduktivität**. Sie gibt an, um wie viele Einheiten sich in etwa die Produktionsmenge x verändert, wenn die Faktoreinsatzmenge r um eine Einheit auf $r + 1$ gesteigert wird.

Prüfen Sie nach, ob die Grenzproduktivität mit steigendem Faktoreinsatz zu- oder abnimmt.

Aufgabe 7.3

Vorbemerkung: *Zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit besteht der folgende Zusammenhang: Wenn f differenzierbar ist, so ist f auch stetig. Oder anders ausgedrückt: Wenn eine Funktion nicht stetig ist, so kann sie auch nicht differenzierbar sein.*

Der Wochenlohn eines Facharbeiters hängt ab von der geleisteten Arbeitsstundenzahl x. Der erste Arbeiter erhält unabhängig von der Anzahl der Stunden GE 50 pro Stunde, der zweite Arbeiter GE 45 pro Stunde für $x \leq 40$ und GE 60 pro Stunde für jede weitere Stunde. Der dritte Arbeiter erhält GE 50 pro Stunde für $x \leq 40$ bzw. GE 55 pro Stunde, falls er mehr als 40 Stunden arbeitet. Wir erhalten die reellen

Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mit:

$$f_1(x) = 50x \ \ ; x \in [0; \infty)$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 45x & \text{für } x \leq 40 \\ 45 \cdot 40 + 60(x-40) = 60x - 600 & \text{für } x > 40 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 50x & \text{für } x \leq 40 \\ 55x & \text{für } x > 40 \end{cases}$$

die jeweils den Lohn der drei Facharbeiter angeben. Stellen Sie die drei Funktionen für $x \in [0; 45]$ grafisch dar. Welche der drei Funktionen sind in $x = 40$ stetig und welche sind in $x = 40$ differenzierbar?

Lösung von Aufgabe 7.1

a) $x(p) = \dfrac{500}{p} - 20 \;\; ; p \in (0; 25)$

b) $x'(p) = -\dfrac{500}{p^2}$ und $\varepsilon_x(p) = -\dfrac{500}{p^2} \cdot \dfrac{p}{\frac{500}{p} - 20} = -\dfrac{500}{500 - 20p}$

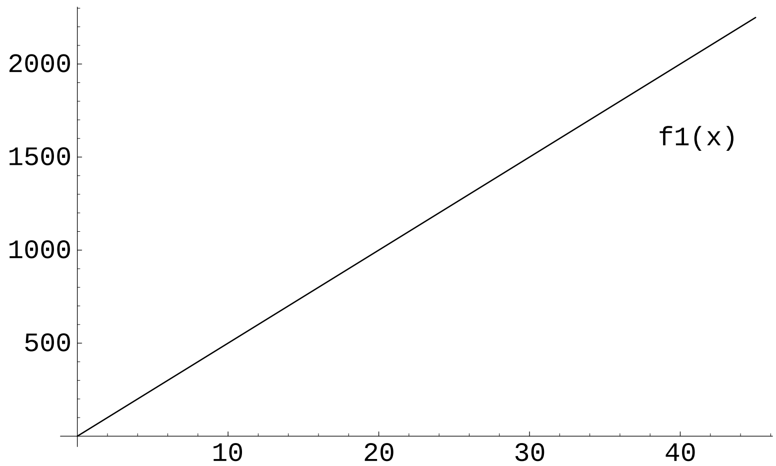
$\varepsilon_x(5) = -1{,}25$
d.h. wird der Preis von 5 GE um 1% erhöht auf 5,05 GE, so sinkt der Absatz um etwa 1,25%. (starke Absatzveränderung)

c) $\varepsilon_x(20) = -5$
d.h. wird der Preis von 20 GE um 1% erhöht auf 20,2 GE, so sinkt der Absatz um etwa 5%. (starke Absatzveränderung)

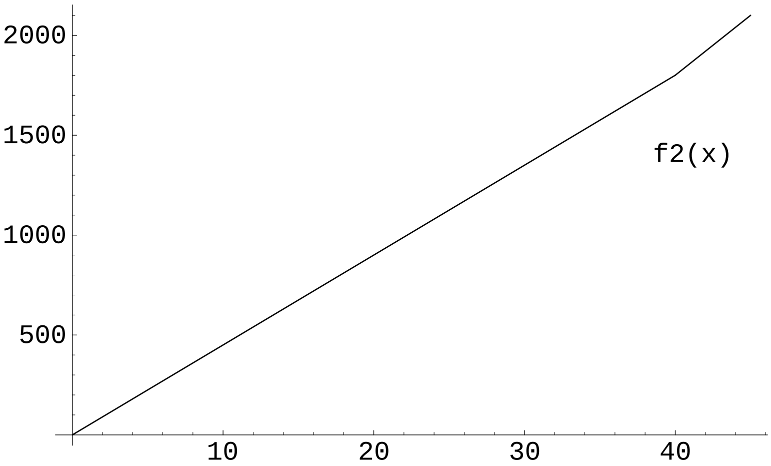
Lösung von Aufgabe 7.2

Die Funktion $x'(r) = \dfrac{20}{3\sqrt[3]{r}}$ ist monoton fallend, da die Funktion $x''(r) = -\dfrac{20}{9} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{r^4}}$ stets kleiner als Null ist.

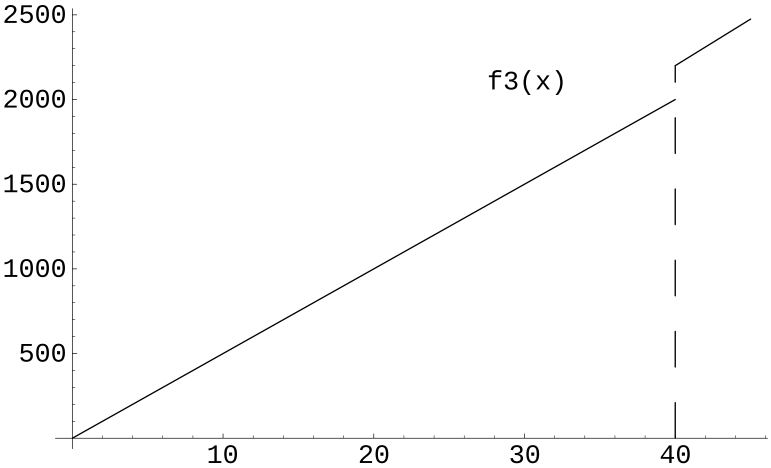
Lösung von Aufgabe 7.3



f_1 ist stetig und differenzierbar in $x = 40$.



f_2 ist stetig in $x = 40$, aber nicht differenzierbar, da die Steigung von links kommend 45 beträgt und von rechts kommend 60.



f_3 ist weder stetig noch differenzierbar in $x = 40$, da jede differenzierbare Funktion auch stetig ist. (Umkehrschluss: Sobald eine Funktion nicht stetig ist, ist sie auch nicht differenzierbar.)