Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen QM I (Wirtschaftsmathematik)

Funktionen mehrerer Veränderlicher

Aufgabe 9.1
Gegeben sei die Produktionsfunktion einer Einproduktunternehmung mit

$$x(r_1, r_2, r_3) = \sqrt{r_1^2 + 4r_2^2 + 5r_3^2 + r_3(r_1 + r_2)}.$$

Um wie viel wächst die Produktionsmenge $x(r_1, r_2, r_3)$, wenn alle drei Produktionsfaktoren auf das 5-fache gesteigert werden?

Aufgabe 9.2
Bilden Sie die alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen folgender Funktionen:

$$f(x, y, z) = 4x^2 - 2xy + 5y + (z - x)^3$$

$$g(x_1, x_2) = 4x_1^3x_2^2 - x_1^4x_2^3$$

$$h(x, y) = 2e^{0,4x-2y}$$

$$k(x, y) = 2x^3 - ln\frac{y}{x}$$

Aufgabe 9.3
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = x_1^2e^{2x_2} + x_2ln(x_3).$$

Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen von f an der Stelle $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 9.4
Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$x(r_1, r_2, r_3) = 5\, r_1^{\frac{1}{4}}\, r_2^{\frac{1}{2}}\, r_3^{\frac{1}{4}}$$

wobei r_i die Einsatzmengen des $i-$ten Produktionsfaktors bezeichnen. Die Preise pro ME der Produktionsfaktoren betragen $q_1 = 3, q_2 = 6, q_3 = 3$ Geldeinheiten.

a) Berechnen Sie für die Faktoreinsatzmengen $(r_1, r_2, r_3) = (1, 100, 1)$ bzw. $(10\,000, 1, 1)$ bzw. $(10, 10, 10)$ die ausgebrachte Menge x.

b) Bestimmen Sie die Produktionskostenfunktion in Abhängigkeit von r_1, r_2, r_3.

c) Berechnen Sie die Produktionskosten für die Faktoreinsatzmengen aus a).

Aufgabe 9.5
Gegeben ist die Kostenfunktion:

$$K(x; y) = 20x + 10y + 2xy + 100 \ \ ; x, y \geq 0$$

Berechnen und interpretieren Sie die partiellen Elastizitäten an der Stelle $(x; y) = (5; 6)$.

Lösung zu Aufgabe 9.1

$$\begin{aligned}
x(5r_1, 5r_2, 5r_3) &= \sqrt{(5r_1)^2 + 4(5r_2)^2 + 5(5r_3)^2 + 5r_3(5r_1 + 5r_2)} \\
&= \sqrt{25r_1^2 + 100r_2^2 + 125r_3^2 + 25r_3(r_1 + r_2)} \\
&= \sqrt{25} \cdot \sqrt{r_1^2 + 4r_2^2 + 5r_3^2 + r_3(r_1 + r_2)} \\
&= 5 \cdot x(r_1, r_2, r_3)
\end{aligned}$$

d.h. wird die Faktoreinsatzmenge verfünffacht, so verfünffacht sich auch die Ausbringungsmenge.
Zahlenbeispiel:
$x(2, 1, 1) = 4$ und bei 5-fachem Input: $x(10, 5, 5) = 20 = 5 \cdot 4$

Lösung zu Aufgabe 9.2

$$\begin{aligned}
f_x(x, y, z) &= 8x - 2y - 3(z - x)^2 \\
f_y(x, y, z) &= -2x + 5 \\
f_z(x, y, z) &= 3(z - x)^2 \\
f_{xx}(x, y, z) &= 8 + 6(z - x) \\
f_{yy}(x, y, z) &= 0 \\
f_{zz}(x, y, z) &= 6(z - x) \\
f_{xy}(x, y, z) &= -2 \\
f_{xz}(x, y, z) &= -6(z - x) \\
f_{yz}(x, y, z) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{x_1}(x_1, x_2) &= 12x_1^2x_2^2 - 4x_1^3x_2^3 \\
g_{x_2}(x_1, x_2) &= 8x_1^3x_2 - 3x_1^4x_2^2 \\
g_{x_1x_1}(x_1, x_2) &= 24x_1x_2^2 - 12x_1^2x_2^3 \\
g_{x_2x_2}(x_1, x_2) &= 8x_1^3 - 6x_1^4x_2 \\
g_{x_1x_2}(x_1, x_2) &= 24x_1^2x_2 - 12x_1^3x_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_x(x, y) &= 0{,}8e^{0{,}4x-2y} \\
h_y(x, y) &= -4e^{0{,}4x-2y} \\
h_{xx}(x, y) &= 0{,}32e^{0{,}4x-2y} \\
h_{yy}(x, y) &= 8e^{0{,}4x-2y} \\
h_{xy}(x, y) &= -1{,}6e^{0{,}4x-2y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k(x, y) &= 2x^3 - \ln\left(\frac{y}{x}\right) = 2x^3 - \ln(y) + \ln(x) \\
k_x(x, y) &= 6x^2 + \frac{1}{x} \\
k_y(x, y) &= -\frac{1}{y} \\
k_{xx}(x, y) &= 12x - \frac{1}{x^2} \\
k_{yy}(x, y) &= \frac{1}{y^2} \\
k_{xy}(x, y) &= 0
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 9.3

$$\begin{aligned}
f_{x_1}(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1e^{2x_2}\\
f_{x_2}(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1^2e^{2x_2}+\ln(x_3)\\
f_{x_3}(x_1,x_2,x_3) &= \frac{x_2}{x_3}\\
f_{x_1}(-1,0,1) &= -2\\
f_{x_2}(-1,0,1) &= 2\\
f_{x_3}(-1,0,1) &= 0
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 9.4

a) $$\begin{aligned}
x(1,100,1) &= 5\cdot 1\cdot 10\cdot 1 = 50\\
x(10\,000,1,1) &= 5\cdot\sqrt[4]{10\,000}\cdot 1\cdot 1 = 50\\
x(10,10,10) &= 5\cdot\sqrt[4]{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt[4]{10} = 5\cdot 10^{1/4}\cdot 10^{1/2}\cdot 10^{1/4} = 5\cdot 10 = 50
\end{aligned}$$

d.h. die Ausbringungsmenge beträgt für alle drei Kombinationen jeweils 50 ME- (Isoquanten=Kurven gleichen Ertrags)

b) Kosten
$K(r_1,r_2,r_3) = 3r_1+6r_2+3r_3$

c)

r	$\begin{pmatrix}1\\100\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\,000\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}$
$K(r)$	606	30 009	120

d.h. insb. sind die Kosten bei gleichen Erträgen für die Kombination (10,10,10) am kleinsten.

Lösung zu Aufgabe 9.5

$K_x(x;y) = 20+2y$ und $K_y(x;y) = 10+2x$

$\varepsilon_x(x;y) = (20+2y)\cdot\dfrac{x}{K(x;y)}$

$\varepsilon_x(5;6) = 32\cdot\dfrac{5}{320} = 0{,}5$

d.h. werden statt $x=5$ ME von Gut I und $y=6$ ME von Gut II jetzt $x=5{,}05$ ME von Gut I und $y=6$ ME von Gut II hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 0,5 %.

$\varepsilon_y(x;y) = (10+2x)\cdot\dfrac{y}{K(x;y)}$

$\varepsilon_y(5;6) = 20\cdot\dfrac{6}{320} = 0{,}375$

d.h. werden statt $x=5$ ME von Gut I und $y=6$ ME von Gut II jetzt $x=5$ ME von Gut I und $y=6{,}06$ ME von Gut II hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 0,375 %.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen QM I (Wirtschaftsmathematik)

Partielle Ableitungen in Klausuren
Stand: 28.05.2018

30.01.2018 $f(x,y) = 3x^2 + 16x - 5xy + 3y - 2y^2 + 5 \;;(x,y) \in \mathbb{R}^2$

30.01.2018 $L(x,y,\lambda) = x^3 + 3x^2 + 5x + 2y^2 - 9y - xy + 111 + \lambda(x+y-10)$

27.09.2017 $L(x,y,\lambda) = 4x^2 + 5y^2 - 2xy + 200 + \lambda(x+2y-50) \;;x,y,\lambda \in \mathbb{R}$

20.07.2017 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy + x + y - 17 \;;(x,y) \in \mathbb{R}^2$

20.07.2017 $L(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 + xy + x + y - 17 + \lambda(x+y-8) \;;x,y,\lambda \in \mathbb{R}$

25.01.2017 $f(x,y) = (7x-5y)^3 \;;x,y \in \mathbb{R}$

25.01.2017 $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - xy - 3ax + \lambda(e^{x+y} - 1) \;;x,y \in \mathbb{R}$

20.09.2016 $L(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 + 4x + 2y - 10 + \lambda(x+y-a) \;;(x,y) \in \mathbb{R}^2$

06.07.2016 $f(x,y) = x^2 + axy + y^2 \;\;(x,y) \in \mathbb{R}^2$

06.07.2016 $f(x,y) = e^{x^2+y^2} \;;(x,y) \in \mathbb{R}^2$

03.02.2016 $L(x,y,\lambda) = 3x^2 + y^2 - 2xy - 100y + 233\,750 + \lambda(x+y-1\,000) \;\;x,y \geq 0$

23.09.2015 $f(x,y) = x^2 \cdot y - 4y + 4x \;;(x,y) \in \mathbb{R}^2$

23.09.2015 $f(x,y,z) = x^2 - x \cdot y + \frac{1}{2}y^2 + x - 4y + \ln(z^2+1) \;;(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

01.07.2015 $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}y^2 - 4y + 10 \;;(x,y) \in \mathbb{R}^2$

01.07.2015 $f(x,y) = y \cdot e^x + 4x + 4y + 8 \;;(x,y) \in \mathbb{R}^2$

04.02.2015 $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - 6y - 3 \;;x,y \in \mathbb{R}$

04.02.2015 $L(x,y,\lambda) = 100 - x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy + \lambda(x+y-10)$

29.09.2014 $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2y^2 + z^3 - 27z + 2x - 2ay + 100 \;;x,y,z \in \mathbb{R}$

03.07.2014 $G(x,y) = -2x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 28y - 400 \;;x,y \geq 0$

07.02.2014 $L(x,y,\lambda) = 8x + 24y + \lambda(x^2 + 2y^2 - 22) \;;x \neq 0, y \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}\{0\}$

26.09.2013 $L(x, y, \lambda) = 3\ln(x) + 15\ln(y) + \lambda(x + y - 120)$; $x, y \in (0; \infty), \lambda \in \mathbb{R}$

03.07.2013 $U(x, y) = 300x - x^2 - xy + 900y - 4y^2$; $x, y \in [0; 150]$

03.07.2013 $r(x, y) = \sqrt{x} + y^2$; $x, y \in (0; \infty)$

31.01.2013 $L(x, y, \lambda) = x^3 + 2y^2 - xy + 100 + \lambda(x + y - 9)$

01.10.2012 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - a \cdot x_3^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3$; $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

05.07.2012 $G(x_1, x_2) = -x_1^2 - a \cdot x_2^2 - x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 1$; $x_1, x_2 \geq 0$

08.02.2012 $f(x, y) = -6x^2 + 6y^2 + 136x - 20xy + 100$; $x, y \in \mathbb{R}$

08.02.2012 $L(x; y; \lambda) = 4x + y - 10 + \lambda(2x^2 + y^2 - 36)$; $x, y > 0$

05.10.2011 $f(x, y) = e^x + \ln(y^2 + 1) + 2x^2y$; $x, y \in \mathbb{R}$

05.10.2011 $L(x, y, \lambda) = -x^2 - y^2 + 7x + 9y - 10 + \lambda(x + y - 10)$; $x, y, \in [0; 10]$

08.07.2011 $f(x, y) = y^2 - x^2 - 2y$; $x, y, \in \mathbb{R}$

08.07.2011 $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + xy + x + y + 100 + \lambda(x + y - 10)$; $x, y, \in \mathbb{R}$

02.02.2011 $K(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + xy + 100$; $x, y \geq 0$

02.02.2011 $L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln(y) + \lambda(x + y - 1)$; $x < -5, y > 0, \lambda \in \mathbb{R}$

27.09.2010 $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4y + \frac{1}{3}y^3$; $x, y \in \mathbb{R}$

06.07.2010 $L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}x^2 + 8y^2 - 24x - 32y + 400 + \lambda(3x - 12y)$; $x, y \geq 0$

09.02.2010 $G(x, y) = -2x^3 - y^2 + 12xy - 700$; $x, y, \geq 7$

09.02.2010 $L(x, y, \lambda) = -0{,}25x^2 - 4y^2 + 12x + 16y - 10 + \lambda(2x - 8y)$ $x, y \geq 0$

30.09.2009 $L(x, y, \lambda) = 20x + 39y - 2x^2 - 3y^2 + \lambda(4x + 6y - 24)$; $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$

17.07.2009 $f(x, y) = x^3 + y^2 - 12xy + 23$; $x, y \in \mathbb{R}$

17.07.2009 $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_2 + 210 + \lambda(x_1 + x_2 - 100)$; $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$

09.02.2009 $G(x, y) = 12x + 54y - x^2 - 4y^2 + xy - 100$; $x, y \in [0; 50]$

15.07.2008 $G(x_1; x_2) = -x_1^3 - 12x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 + 90x_1 + 30x_2 - 10$; $x_1, x_2 \geq 0$

28.01.2008 $G(x; y) = -2x^2 - y^2 + 50x + 15y - xy - 50$; $x \in [0; 15], y \in [0; 20]$

28.01.2008 $L(x, y, \lambda) = -2x^2 - y^2 + 50x + 15y - xy - 50 + \lambda(2x - y)$

10.07.2007 $L(x_1, x_2, \lambda) = \sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2} + \lambda(0{,}5x_1 + 4x_2 - 96)\ \ ; x_1, x_2 > 0$

06.02.2007 $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 4)$

11.07.2006 $f(x; y) = x^3 - 12x - y^2 + 2y - 10\ \ ; x, y \in \mathbb{R}$

19.04.2006 $f(x, y) = 3x^2 - 4y^2 + 5xy - 14{,}6x$

02.02.2006 $f(x, y) = xy^4 + \ln(x^2 + 1) + \dfrac{x}{y}$

02.02.2006 $L(x, y, \lambda) = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 625)$

12.07.2005 $L(x, y, \lambda) = 10x + 22y + 527 + \lambda(x^2 + y^2 - 146)$

30.03.2005 $G(x, y) = 120x - x^2 + 70y - 0{,}5y^2 - 100$

Lösungen:

30.01.2018

$$f_x(x,y) = 6x + 16 - 5y \quad f_{xx}(x,y) = 6$$
$$f_y(x,y) = -5x + 3 - 4y \quad f_{yy}(x,y) = -4$$
$$f_{xy}(x,y) = -5$$

30.01.2018

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 3x^2 + 6x + 5 - y + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= 6x + 6 \\ L_y(x,y,\lambda) &= 4y - 9 - x + \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= 4 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x + y - 10 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= -1 \end{aligned}$$

27.09.2017

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 8x - 2y + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= 8 \\ L_y(x,y,\lambda) &= 10y - 2x + 2\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= 10 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x + 2y - 50 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= -2 \end{aligned}$$

20.07.2017

$$f_x(x,y) = 2x + y + 1 \quad f_{xx}(x,y) = 2$$
$$f_y(x,y) = 4y + x + 1 \quad f_{yy}(x,y) = 4$$
$$f_{xy}(x,y) = 1$$

20.07.2017

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 2x + y + 1 + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= 2 \\ L_y(x,y,\lambda) &= 4y + x + 1 + \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= 4 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x + y - 8 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= 1 \end{aligned}$$

25.01.2017

$$f_x(x,y) = 21(7x - 5y)^2 \quad f_{xx}(x,y) = 294(7x - 5y)$$
$$f_y(x,y) = -15(7x - 5y)^2 \quad f_{yy}(x,y) = 150(7x - 5y)$$
$$f_{xy}(x,y) = -210(7x - 5y)$$

25.01.2017 $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - xy - 3ax + \lambda(e^{x+y} - 1)$

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 2x - y - 3a + \lambda e^{x+y} & L_{xx}(x,y,\lambda) &= 2 + \lambda e^{x+y} \\ L_y(x,y,\lambda) &= 2y - x + \lambda e^{x+y} & L_{yy}(x,y,\lambda) &= 2 + \lambda e^{x+y} \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= e^{x+y} - 1 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= -1 + \lambda e^{x+y} \end{aligned}$$

20.09.2016

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 2x + y + 4 + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= 2 \\ L_y(x,y,\lambda) &= x + 2y + 2 + \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= 2 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x + y - a & L_{xy}(x,y,\lambda) &= 1 \end{aligned}$$

06.07.2016

$$f_x(x,y) = 2x + ay \quad f_{xx}(x,y) = 2$$
$$f_y(x,y) = ax + 2y \quad f_{yy}(x,y) = 2$$
$$f_{xy}(x,y) = a$$

06.07.2016

$$f_x(x,y) = 2x \cdot e^{x^2+y^2} \quad f_{xx}(x,y) = 2 \cdot e^{x^2+y^2} + 2x \cdot 2x \cdot e^{x^2+y^2} = e^{x^2+y^2}(2 + 4x^2)$$
$$f_y(x,y) = 2y \cdot e^{x^2+y^2} \quad f_{yy}(x,y) = e^{x^2+y^2}(2 + 4y^2)$$
$$f_{xy}(x,y) = 4xy \cdot e^{x^2+y^2}$$

03.02.2016

$$L_x(x,y,\lambda) = 6x - 2y + \lambda \quad L_{xx}(x,y\lambda) = 6$$
$$L_y(x,y,\lambda) = 2y - 2x - 100 + \lambda \quad L_{yy}(x,y,\lambda) = 2$$
$$L_\lambda(x,y,\lambda) = x + y - 1\,000 \quad L_{xy}(x,y,\lambda) = -2$$

23.09.2015 $\quad f_x(x,y) = 2xy+4 \quad f_{xx}(x,y) = 2y$

$$f_y(x,y) = x^2-4 \quad f_{yy}(x,y) = 0$$
$$f_{xy}(x,y) = 2x$$

23.09.2015 $\quad f_x(x,y,z) = 2x-y+1$

$$f_y(x,y,z) = -x+y-4$$
$$f_z(x,y,z) = \frac{2z}{z^2+1}$$

01.07.2015 $\quad f_x(x,y) = x^2-3x+2 \quad f_{xx}(x,y) = 2x-3$

$$f_y(x,y) = y-4 \quad f_{yy}(x,y) = 1$$
$$f_{xy}(x,y) = 0$$

01.07.2015 $\quad f_x(x,y) = y\cdot e^x+4 \quad f_{xx}(x,y) = y\cdot e^x$

$$f_y(x,y) = e^x+4 \quad f_{yy}(x,y) = 0$$
$$f_{xy}(x,y) = e^x$$

04.02.2015

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x+2y & f_{xx}(x,y) &= 2 \\ f_y(x,y) &= -2y+2x-6 & f_{yy}(x,y) &= -2 \\ & & f_{xy}(x,y) &= 2 \end{aligned}$$

04.02.2015

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= -2x+y+\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= -2 \\ L_y(x,y,\lambda) &= -y+x+\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= -1 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x+y-10 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= 1 \end{aligned}$$

29.09.2014

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 2x+2y+2 & f_{xx}(x,y,z) &= 2 & f_{xy}(x,y,z) &= 2 \\ f_y(x,y,z) &= 2x+4y-2a & f_{yy}(x,y,z) &= 4 & f_{xz}(x,y,z) &= 0 \\ f_z(x,y,z) &= 3z^2-27 & f_{zz}(x,y,z) &= 6z & f_{yz}(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

03.07.2014

$$\begin{aligned} G_x(x,y) &= -4x-4y+16 & G_{xx}(x,y) &= -4 \\ G_y(x,y) &= -4x-8y+28 & G_{yy}(x,y) &= -8 \\ & & G_{xy}(x,y) &= -4 \end{aligned}$$

07.02.2014

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 8+2\lambda x & L_{xx}(x,y,\lambda) &= 2\lambda \\ L_y(x,y,\lambda) &= 24+4\lambda y & L_{yy}(x,y,\lambda) &= 4\lambda \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2+2y^2-22 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

26.09.2013

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= \tfrac{3}{x}+\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= -\tfrac{3}{x^2} \\ L_y(x,y,\lambda) &= \tfrac{15}{y}+\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= -\tfrac{15}{y^2} \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x+y-120 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

03.07.2013

$$\begin{aligned} U_x(x,y) &= 300-2x-y & U_{xx} &= -2 \\ U_y(x,y) &= -x+900-8y & U_{yy} &= -8 \\ & & U_{xy}(x,y) &= -1 \end{aligned}$$

03.07.2013 $r_x(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad r_y(x,y) = 2y$

31.01.2013
$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 3x^2 - y + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= 6x \\ L_y(x,y,\lambda) &= 4y - x + \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= 4 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x + y - 9 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= -1 \end{aligned}$$

01.10.2012
$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_1,x_2,x_3) &= -2x_1 - x_2 \\ f_{x_2}(x_1,x_2,x_3) &= -2x_2 - x_1 + x_3 \\ f_{x_3}(x_1,x_2,x_3) &= -2ax_3 + x_2 \\ f_{x_1x_1}(x_1,x_2,x_3) &= -2 & f_{x_1x_2}(x_1,x_2,x_3) &= -1 \\ f_{x_2x_2}(x_1,x_2,x_3) &= -2 & f_{x_1x_3}(x_1,x_2,x_3) &= 0 \\ f_{x_3x_3}(x_1,x_2,x_3) &= -2a & f_{x_2x_3}(x_1,x_2,x_3) &= 1 \end{aligned}$$

05.07.2012
$$\begin{aligned} G_{x_1}(x_1,x_2) &= -2x_1 - x_2 + 2 & G_{x_1x_1}(x_1,x_2) &= -2 \\ G_{x_2}(x_1,x_2) &= -2ax_2 - x_1 + 3 & G_{x_2x_2}(x_1,x_2) &= -2a \\ & & G_{x_1x_2}(x_1,x_2) &= -1 \end{aligned}$$

08.02.2012
$$\begin{aligned} &f_x(x,y) = -12x + 136 - 20y & &f_{xx}(x,y) = -12 \\ &f_y(x,y) = 12y - 20x & &f_{yy} = 12 \\ & & &f_{xy} = -20 \end{aligned}$$

08.02.2012
$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 4 + 4\lambda x & L_{xx}(x,y,\lambda) &= 4\lambda \\ L_y(x,y,\lambda) &= 1 + 2\lambda y & L_{yy}(x,y,\lambda) &= 2\lambda \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= 2x^2 + y^2 - 36 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

05.10.2011
$$\begin{aligned} &f_x(x,y) = e^x + 4xy & &f_{xx}(x,y) = e^x + 4y \\ &f_y(x,y) = \frac{2y}{y^2+1} + 2x^2 & &f_{yy} = 2 \cdot \frac{1-y^2}{(y^2+1)^2} \\ & & &f_{xy} = 4x \end{aligned}$$

05.10.2011
$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= -2x + 7 + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= -2 \\ L_y(x,y,\lambda) &= -2y + 9 + \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= -2 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x + y - 10 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

08.07.2011
$$\begin{aligned} &f_x(x,y) = -2x & &f_{xx}(x,y) = -2 \\ &f_y(x,y) = 2y - 2 & &f_{yy}(x,y) = 2 \\ & & &f_{xy}(x,y) = 0 \end{aligned}$$

08.07.2011
$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 2x + y + 1 + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= 2 \\ L_y(x,y,\lambda) &= 2y + x + 1 + \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= 2 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x + y - 10 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= 1 \end{aligned}$$

02.02.2011 $K_x(x,y) = 6x + y$ und $K_y(x,y) = 4y + x$

02.02.2011
$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= x+\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= 1 \\ L_y(x,y,\lambda) &= -\frac{2}{y}+\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= \frac{2}{y^2} \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x+y-1 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

27.09.2010
$$\begin{aligned} &f_x(x,y) = x^2+4x & &f_{xx}(x,y) = 2x+4 \\ &f_y(x,y) = -4+y^2 & &f_{yy}(x,y) = 2y \\ & & &f_{xy}(x,y) = 0 \end{aligned}$$

06.07.2010
$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= x-24+3\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= 1 \\ L_y(x,y,\lambda) &= 16y-32-12\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= 16 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= 3x-12y & L_{xy}(x,y,\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

09.02.2010 $G_x(x,y) = -6x^2+12y$ und $G_y(x,y) = -2y+12x$

09.02.2010 $L_x(x,y,\lambda) = -0{,}5x+12+2\lambda$ und $L_y(x,y,\lambda) = -8y+16-8\lambda$ und $L_\lambda(x,y,\lambda) = 2x-8y$

30.09.2009 $L_x(x,y,\lambda) = 20-4x+4\lambda$ und $L_y(x,y,\lambda) = 39-6y+6\lambda$ und $L_\lambda(x,y,\lambda) = 4x+6y-24$

17.07.2009 $f_x(x,y) = 3x^2-12y$ und $f_y(x,y) = 2y-12x$

17.07.2009 $L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda) = 2x_1+\lambda$ und $L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda) = 2x_2-8+\lambda$ und $L_\lambda(x_1,x_2,\lambda) = x_1+x_2-100$

09.02.2009
$$\begin{aligned} G_x(x,y) &= 12-2x+y & G_{xx}(x,y) &= -2 \\ G_y(x,y) &= 54-8y+x & G_{yy}(x,y) &= -8 \\ & & G_{xy}(x,y) &= 1 \end{aligned}$$

15.07.2008
$$\begin{aligned} G_{x_1}(x_1,x_2) &= -3x_1^2-24x_1-4x_2+90 & G_{x_1x_1}(x_1,x_2) &= -6x_1-24 \\ G_{x_2}(x_1,x_2) &= -2x_2-4x_1+30 & G_{x_2x_2}(x_1,x_2) &= -2 \\ & & G_{x_1x_2}(x_1,x_2) &= -4 \end{aligned}$$

28.01.2008
$$\begin{aligned} G_x(x,y) &= -4x+50-y & G_{xx}(x,y) &= -4 \\ G_y(x,y) &= -2y+15-x & G_{yy}(x,y) &= -2 \\ & & G_{xy}(x,y) &= -1 \end{aligned}$$

28.01.2008
$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= -4x+50-y+2\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= -4 \\ L_y(x,y,\lambda) &= -2y+15-x-\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= -2 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= 2x-y & L_{xy}(x,y,\lambda) &= -1 \end{aligned}$$

10.07.2007
$$\begin{aligned} &L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}+0{,}5\lambda & &L_{x_1x_1}(x_1,x_2,\lambda) = -\frac{1}{4\sqrt{x_1^3}} \\ &L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{x_2}}+4\lambda & &L_{x_2x_2}(x_1,x_2,\lambda) = -\frac{1}{2\sqrt{x_2^3}} \\ &L_\lambda(x_1,x_2,\lambda) = 0{,}5x_1+4x_2-96 & &L_{x_1x_2}(x_1,x_2,\lambda) = 0 \end{aligned}$$

06.02.2007	$L_x(x,y,\lambda) = 2x+\lambda$	$L_{xx}(x,y,\lambda) = 2$
	$L_y(x,y,\lambda) = 2y+\lambda$	$L_{yy}(x,y,\lambda) = 2$
	$L_\lambda(x,y,\lambda) = x+y-4$	$L_{xy}(x,y,\lambda) = 0$

11.07.2006 $f_x(x;y) = 3x^2 - 12$ und $f_y(x;y) = -2y+2$
$f_{xx}(x;y) = 6x$ und $f_{yy}(x;y) = -2$ und $f_{xy}(x;y) = 0$

19.04.2006 $f_x(x,y) = 6x + 5y - 14{,}6$ und $f_y(x,y) = -8y + 5x$
$f_{xx}(x,y) = 6$ und $f_{yy}(x,y) = -8$ und $f_{xy}(x,y) = 5$

02.02.2006 $f_x(x,y) = y^4 + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{y}$ und $f_y(x,y) = 4xy^3 - \frac{x}{y^2}$

02.02.2006 $L_x(x,y,\lambda) = 2(x-3)+2\lambda x$ und $L_y(x,y,\lambda) = 2(y-4)+2\lambda y$ und $L_\lambda(x,y,\lambda) = x^2+y^2-625$
$L_{xx}(x,y,\lambda) = 2+2\lambda$ und $L_{yy}(x,y,\lambda) = 2+2\lambda$ und $L_{xy}(x,y,\lambda) = 0$

12.07.2005 $L_x(x,y,\lambda) = 10+2\lambda x$ und $L_y(x,y,\lambda) = 22+2\lambda y$ und $L_\lambda(x,y,\lambda) = x^2+y^2-146$
$L_{xx}(x,y,\lambda) = 2\lambda$ und $L_{yy}(x,y,\lambda) = 2\lambda$ und $L_{xy}(x,y,\lambda) = 0$

30.03.2005 $G_x(x,y) = 120 - 2x$ und $G_y(x,y) = 70 - y$
$G_{xx}(x,y) = -2$ und $G_{yy}(x,y) = -1$ und $G_{xy}(x,y) = 0$