4 Rentenrechnung

Hauptaufgabe: Guthaben berechnen, das bei regelmäßigen gleich hohen Einzahlungen von r GE (Rente) mit $p\%$ Verzinsung pro Jahr nach n Jahren entstanden ist. Geschehen die regelmäßigen Zahlungen nur einmal pro Jahr, so handelt es sich um eine jährliche Rente. Geschehen die regelmäßigen Zahlungen hingegen mehrmals in einem Jahr, so handelt es sich um eine unterjährige Rente.

4.1 Jährliche Renten

Bei jährlichen Renten wird unterschieden, ob die regelmäßige Zahlung jeweils zu Beginn eines Jahres erfolgt (vorschüssige Jahresrente r') oder jeweils am Ende eines Jahres (nachschüssige Jahresrente r).

⚠ Vor- und nachschüssige Jahresrenten werden nachschüssig verzinst!

4.1.1 Nachschüssige Jahresrente

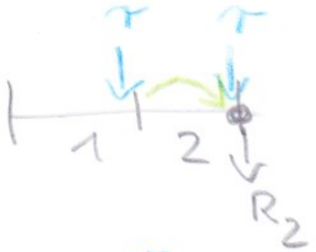
d.h. regelmäßige gleich hohe Zahlungen von r GE jeweils a.E.d.J. = $\boxed{\text{am Ende des Jahres}}$. Das Guthaben nach n Jahren wird als Rentenendwert R_n bezeichnet.

$R_n = ?$

wir schauen uns jeweils den Kontostand a.E.d.J. an:

$R_1 = r$

$R_2 = r + r \cdot q$



$R_3 = r + r \cdot q + r \cdot q^2$

$\vdots$

$R_6 = r + r \cdot q + r \cdot q^2 + r \cdot q^3 + r \cdot q^4 + r \cdot q^5$

wir möchten den Rentenendwert mit einer kürzeren Formel berechnen. Dazu multiplizieren wir R_6 mit q:

$R_6 \cdot q = rq + rq^2 + rq^3 + r \cdot q^4 + rq^5 + rq^6$

Außerdem multiplizieren wir R_6 mit -1:

$R_6 \cdot (-1) = -r - rq - rq^2 - rq^3 - rq^4 - rq^5$

Jetzt addieren wir beide Terme:

$$R_6 \cdot q + R_6 \cdot (-1) = R_6 (q-1) = \begin{array}{ccccccc} & rq & +rq^2 & +rq^3 & +rq^4 & +rq^5 & +rq^6 \\ -r & -rq & -rq^2 & -rq^3 & -rq^4 & -rq^5 & \end{array}$$

Das ergibt:

$R_6 \cdot (q-1) = rq^6 - r = r(q^6 - 1)$

Anschließend dividieren wir wieder durch $(q-1)$:

$R_6 = r \cdot \dfrac{q^6 - 1}{q - 1}$ Rentenendwert nach 6 Jahren

Allgemein gilt: F. 2. 1

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$ Rentenendwert einer nachschüssigen Jahresrente

Beispiel:

Zwölf Jahre lang werden jeweils a.E.d.J. 300 € eingezahlt
3% Jahreszins

a) wie hoch ist das Guthaben nach zwölf Jahren?

$$R_{12} = 300 \cdot \frac{1{,}03^{12} - 1}{0{,}03} = 4\,257{,}61 \text{ €}$$

b) welcher Betrag ist heute einzuzahlen, um in den kommenden zwölf Jahren aus diesem Betrag eine nachschüssige Jahresrente von 300 € zu beziehen?

1. Lösungsweg:

$$\frac{4\,257{,}61}{1{,}03^{12}} = 2\,986{,}20 = \text{Rentenbarwert } R_0$$

2. Lösungsweg:

$$R_0 = \frac{R_{12}}{1{,}03^{12}} = R_{12} \cdot \frac{1}{1{,}03^{12}} = 300 \cdot \frac{1{,}03^{12} - 1}{0{,}03} \cdot \frac{1}{1{,}03^{12}} = 2\,986{,}20$$

Allgemein gilt: F. Z. 1

$$R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$$ Rentenbarwert einer nachschüssigen Jahresrente

Neben R_0 und R_n lässt sich auch die Laufzeit n einer nachsch. Jahresrente berechnen. Dabei wird unterschieden, ob R_0 oder aber R_n bekannt sind. Erfahrungsgemäß haben Studierende Probleme zu erkennen, ob R_0 oder R_n bekannt ist. Wird jedoch eine Zeitachse für die Jahresrente gezeichnet, so ist es offensichtlich.

Beispiel:

5 % Jahreszins, 5000 € nachsch. Jahresrente

Nach wie vielen Jahren übersteigt das Guthaben erstmals den Wert von 45 000 €?

1. Lösungsweg: F. 2. 1

$45\,000 = R_n = 5000 \cdot \frac{1{,}05^n - 1}{0{,}05}$ | Division durch 5000

$9 = \frac{1{,}05^n - 1}{0{,}05}$ | Multiplikation mit 0,05

$0{,}45 = 1{,}05^n - 1$ | Addition von 1

$1{,}45 = 1{,}05^n \iff \underbrace{n = \log_{1{,}05} 1{,}45 = \frac{\ln 1{,}45}{\ln 1{,}05}}_{\text{Brückenkurs Wirtschaftsmathematik}} = 7{,}6$ Jahre

d.h. 7 Jahre reichen nicht aus, aber 8 Jahre. Probe:

$R_7 = 5000 \cdot \frac{1{,}05^7 - 1}{0{,}05} = 40\,710{,}04 < 45\,000$

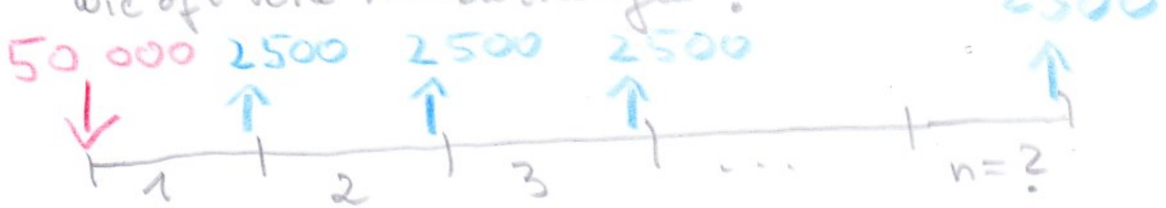
$R_8 = 5000 \cdot \frac{1{,}05^8 - 1}{0{,}05} = 47\,745{,}54 > 45\,000$

2. Lösungsweg: Laufzeitformel F. 2. 1

$n = \frac{\ln\left[1 + \frac{R_n}{r}(q-1)\right]}{\ln q} = \frac{\ln\left[1 + \frac{45\,000}{5000} \cdot 0{,}05\right]}{\ln 1{,}05} = 7{,}6$ Jahre

Rentenendwert, falls R_n bekannt ist

Beispiel:
Gegen Einzahlung von 50 000 € soll eine nachschüssige Jahresrente von 2 500 € ausgezahlt werden. 4% Jahreszins.
Wie oft volle Auszahlungen?



$R_0 = 50\,000$

1. Lösungsweg: F. 2. 1

$50\,000 = 2500 \cdot \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^n}$ | Division durch 2500

$20 = \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^n}$ | Multiplikation mit 0,04

$0{,}8 = (1{,}04^n - 1) \cdot \frac{1}{1{,}04^n}$ | Multiplikation mit $1{,}04^n$

$0{,}8 \cdot 1{,}04^n = 1{,}04^n - 1$ | Addition von 1

$1 + 0{,}8 \cdot 1{,}04^n = 1{,}04^n$ | Subtraktion von $0{,}8 \cdot 1{,}04^n$

$$1 = 1{,}04^n - 0{,}8 \cdot 1{,}04^n = \underbrace{1 \cdot 1{,}04^n - 0{,}8 \cdot 1{,}04^n = (1-0{,}8) \cdot 1{,}04^n}_{\text{Distributivgesetz Brückenkurs W-Mathe}}$$

Somit haben wir:

$1 = 0{,}2 \cdot 1{,}04^n$ | Division durch 0,2

$$\underbrace{5 = 1{,}04^n \Leftrightarrow n = \log_{1{,}04} 5 = \frac{\ln 5}{\ln 1{,}04}}_{\text{Brückenkurs W-Mathe}} = 41{,}04 \text{ Jahre}$$

d.h. 41-mal kann die volle Rente ausgezahlt werden.

2. Lösungsweg: Laufzeitformel F. 2. 1

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{R_0}{r}(q-1)\right]}{\ln q} = -\frac{\ln\left[1 - \frac{50000}{2500} \cdot 0{,}04\right]}{\ln 1{,}04}$$

Rentenendwert, falls R_0 bekannt ist $= 41{,}04$ Jahre

Zusatzfrage: wie hoch ist das Restguthaben ein Jahr nach der letzten vollen Auszahlung?

$50\,000 \cdot 1{,}04^{41} = 249\,653{,}07$

$R_{41} = 2500 \cdot \frac{1{,}04^{41} - 1}{0{,}04} = 249\,566{,}34$ −

$86{,}73$ ← Restguthaben am Ende des 41. Jahres

Restguthaben am Ende des 42. Jahres:

$86{,}73 \cdot 1{,}04 = 90{,}20$ €