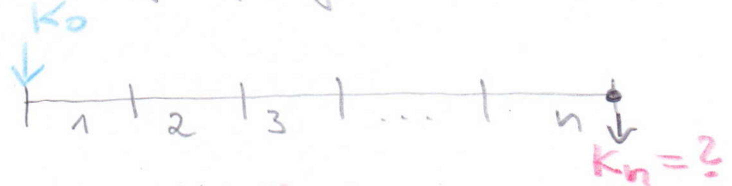
3 Zinseszinsen

Bei der linearen Verz. werden die Zinsen aus dem Vorjahr im nächsten Jahr nicht mitverzinst. Bei der Zinseszinsrechnung gibt es hingegen Zinsen auf Zinsen, dabei werden drei Zinsmodelle unterschieden:

Zinsen <
- nur für volle Jahre, d.h. jährliche Verz.
- auch für Jahresbruchteile gibt es Zinsen, d.h. unterjährige Verz.
- volle Jahre werden anders verzinst als Jahresbruchteile; d.h. gemischte Verz.

3.1 Jährliche Verz.

Hauptaufgabe: Endguthaben K_n berechnen, auf das ein Kapital von K_0 GE nach n Jahren ($n = 1, 2, 3, \ldots$) angewachsen sein wird, wenn bei jeder Verz. zu p% pro Jahr die Zinsen aus dem Vorjahr mitverzinst werden.



3.1.1 Nachschüssige Verz.

d.h. Zinsen werden erst nach Ablauf eines Jahres gezahlt.

Verzinsungsplan

Jahr	Zinsen a.E.d.J.	Guthaben a.E.d.J.
1	$K_0 \cdot i$	$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = \boxed{K_0(1+i)}$
2	$K_1 \cdot i$	$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = \boxed{K_1}(1+i) = \boxed{K_0(1+i)^2}$
3	$K_2 \cdot i$	$K_3 = K_2 + K_2 \cdot i = \boxed{K_2}(1+i) = K_0(1+i)^3$
⋮		⋮
n	$K_{n-1} \cdot i$	$K_n = K_0(1+i)^n$ d.h. $K_n = K_0 \cdot q^n$ F. 1.2

⚠ $n \in \mathbb{N}$ d.h. nur volle Jahre

Beispiel:

2000 € Startkapital, 2,5% Zins p.a., $K_4 = ?$

$K_4 = 2000 \cdot 1{,}025^4 = 2\,207{,}63$ €

Verzinsungsplan

Jahr	Zinsen	Guthaben
1	50 +2,5%	2050
2	51,25	2101,25
3	52,53	2153,78
4	53,24	2207,63

Beispiel:

Welcher Betrag ist heute anzulegen, um nach fünf Jahren 1000 € als Guthaben zu haben, wenn der Jahreszins bei nachschl. Verz.
a) 4% bzw. b) 8% bzw. c) 10% beträgt?

zu a) $1000 = K_0 \cdot 1{,}04^5 \Leftrightarrow K_0 = \frac{1000}{1{,}04^5} = 821{,}93$ €

zu b) $1000 = K_0 \cdot 1{,}08^5 \Leftrightarrow K_0 = \frac{1000}{1{,}08^5} = 680{,}58$ €

zu c) $1000 = K_0 \cdot 1{,}1^5 \Leftrightarrow K_0 = \frac{1000}{1{,}1^5} = 620{,}92$ €

Fazit: Je höher der Zins, desto kleiner ist der Barwert.

Wir rechnen jetzt noch Beispiele, um aus $K_n = K_0 \cdot q^n$ die Größe q bzw. n zu bestimmen.

Beispiel:

$K_0 = 100\,000$ €, $K_{27} = 170\,688{,}65$ €, nachsch. Verz., Zins = ?

$170\,688{,}65 = 100\,000 \cdot q^{27} \quad | : 100\,000$

$1{,}7068865 = q^{27} \quad | \text{ 27. Wurzel}$

$q = \sqrt[27]{1{,}70688} = 1{,}70688^{1/27} = 1{,}02$ d.h. Jahreszins = 2%

Beispiel:

$K_0 = 20\,000$ €, $K_n = 29\,511{,}23$ €, Jahreszins 3,6%, Laufzeit = ?

1. Lösungsweg:

$29\,511{,}23 = 20\,000 \cdot 1{,}036^n \quad | : 20\,000$

$\frac{29\,511{,}23}{20\,000} = 1{,}036^n \quad | \ln$

$\ln \frac{29\,511{,}23}{20\,000} = \ln\left(1{,}036^n\right) = n \cdot \ln 1{,}036 \quad | : \ln 1{,}036$

$n = \frac{\ln \frac{29\,511{,}23}{20\,000}}{\ln 1{,}036} = 11$ Jahre

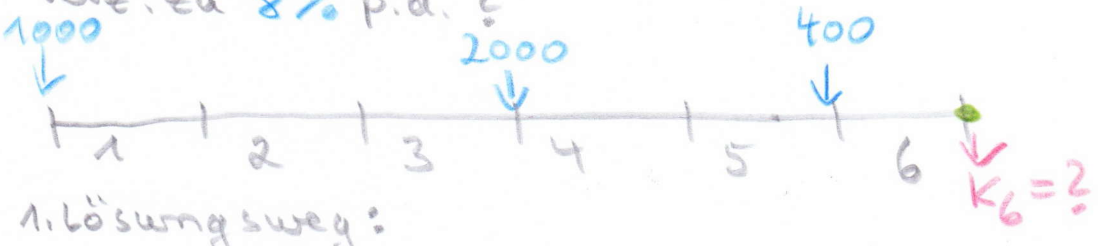
2. Lösungsweg:

$n = \frac{\ln \frac{K_n}{K_0}}{\ln q}$ F. 1.2 $\qquad n = \frac{\ln \frac{29\,511{,}23}{20\,000}}{\ln 1{,}036} = 11$ Jahre

Liegen mehrere Teilbeträge vor, so hat der Tag der Wertstellung keinen Einfluss auf das Ergebnis, das Ergebnis ist eindeutig.

Beispiel:

Auf ein Konto werden nacheinander 1000 € sofort, 2000 € nach drei Jahren und 400 € nach zwei weiteren Jahren eingezahlt. Wie hoch ist der Kontostand ein Jahr nach der letzten Einzahlung bei nachsch. Verz. zu 8% p.a.?



1. Lösungsweg:

$K_3 = 1000 \cdot 1{,}08^3 + 2000 = 3259{,}71$

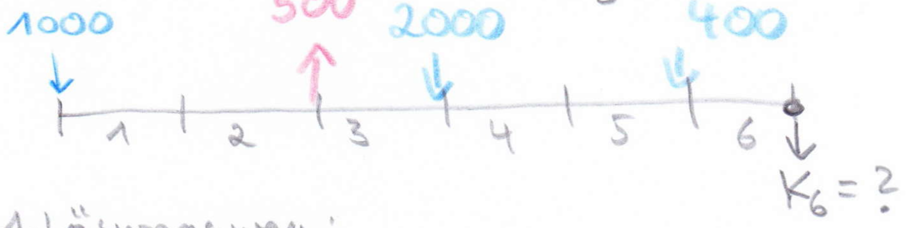
$K_5 = 3259{,}72 \cdot 1{,}08^2 + 400 = 4202{,}13$

$K_6 = 4202{,}13 \cdot 1{,}08 = 4538{,}30$

2. Lösungsweg:

$K_6 = 1000 \cdot 1{,}08^6 + 2000 \cdot 1{,}08^3 + 400 \cdot 1{,}08 = 4538{,}30$

Angenommen es werden am Ende des 2. Jahres 500 € abgehoben. Wie hoch ist dann der Kontostand ein Jahr nach der letzten Einzahlung?



1. Lösungsweg:

$K_2 = 1000 \cdot 1{,}08^2 - 500 = 666{,}40$

$K_3 = 666{,}40 \cdot 1{,}08 + 2000 = 2719{,}71$

$K_5 = 2719{,}71 \cdot 1{,}08^2 + 400 = 3572{,}27$

$K_6 = 3572{,}27 \cdot 1{,}08 = 3858{,}05$

2. Lösungsweg:

$K_6 = 1000 \cdot 1{,}08^6 - 500 \cdot 1{,}08^4 + 2000 \cdot 1{,}08^3 + 400 \cdot 1{,}08 = 3858{,}05$

3. Lösungsweg:

$K_6 = 4538{,}30 - 500 \cdot 1{,}08^4 = 3858{,}05$

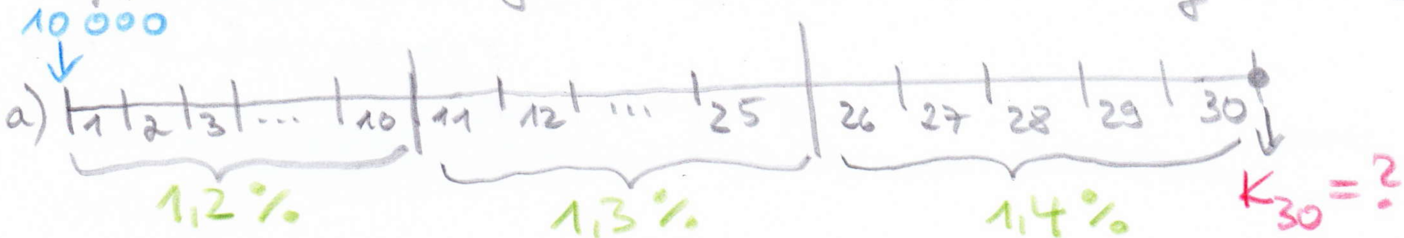
Bei Geldanlagen können auch unterschiedlich hohe Zinsphasen auftreten.

Beispiel

10000 € werden bei nachschl. Verz. angelegt. In den ersten zehn Jahren beträgt der Jahreszins 1,2%. In den darauffolgenden fünfzehn Jahren steigt er auf 1,3%, anschließend steigt er auf 1,4%.

a) $K_{30} = ?$

b) Am Ende welchen Jahres wird erstmals der Betrag 13000 € überschritten?



zu a) 1. Lösungsweg:

$K_{10} = 10\,000 \cdot 1{,}012^{10} = 11\,266{,}92$

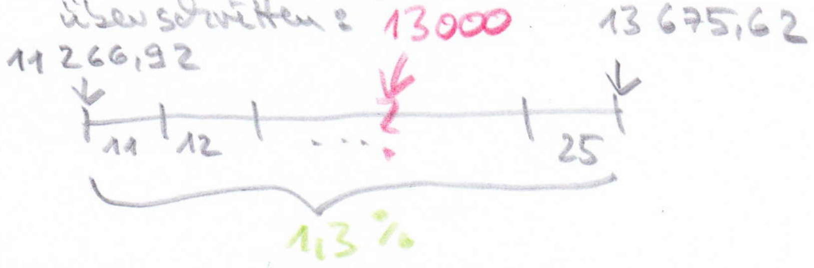
$K_{25} = 11\,266{,}92 \cdot 1{,}013^{15} = 13\,675{,}62$

$K_{30} = 13\,675{,}62 \cdot 1{,}014^5 = 14\,660{,}10$

2. Lösungsweg:

$K_{30} = 10000 \cdot 1{,}012^{10} \cdot 1{,}013^{15} \cdot 1{,}014^5 = 14\,660{,}09$

zu b) Der Betrag von 13 000 € wird zwischen dem 11. und 25. Jahr überschritten:



$$n = \frac{\ln \frac{13\,000}{11\,266{,}92}}{\ln 1{,}013} = 11{,}08 \text{ Jahre}$$

d.h. nach 10 + 12 = 22 Jahren.