01.04.19

10.) Diskrete Verteilungsmodelle

10.1.) Binomialverteilung

nomos = Gesetz
bi = zwei

Bsp: Multiple Choice Test
viele Fragen
pro Frage gibt es jeweils drei Antworten, von denen genau eine richtig ist.

Kandidat versucht, richtige Antwort zu raten.

Ziel: Wahrscheinlichkeiten berechnen, dass z.B. genau drei Fragen richtig beantwortet werden.

$$X_1 = \begin{cases} 0; & \text{1. Frage wird falsch beantwortet} \\ 1; & \text{... richtig} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 0; & \text{2. Frage falsch} \\ 1; & \text{... richtig} \end{cases}$$

$x_3 = \begin{cases} 0; & \text{3. Frage falsch} \\ 1; & \text{... richtig} \end{cases}$ 01.04.19

$x_4 = \begin{cases} 0; & \text{4. Frage falsch} \\ 1; & \text{... richtig} \end{cases}$

Y = Anzahl der richtig beantworteten Fragen

$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$

a) Wkt., dass keine Frage richtig beantwortet wird?

$P(Y=0) = P(X_1=0;\ X_2=0;\ X_3=0;\ X_4=0)$

$\underset{\text{stochastisch unabhängig}}{=} P(X_1=0) \cdot \underbrace{P(X_2=0)}_{2/3} \cdot P(X_3=0) \cdot P(X_4=0)$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0{,}1975$

b) Wkt., dass genau eine Frage richtig beantwortet wird?

	X_1	X_2	X_3	X_4
$P(Y=1) =$	1	0	0	0
	0	1	0	0
	0	0	1	0
	0	0	0	1
	↓ 2/3	↓ 2/3	↓ 2/3	↓ 1/3

$= 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}3951$

Y	0	1	2	3	4
$P(Y=y)$	0,1975	0,3951	0,2963	0,0988	0,0123

$\Sigma = 1$

c) $P(Y=2) = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$

$= 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0{,}2963$

d) $P(Y=3) = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$

$= 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0{,}0988$

e) $P(Y=4) = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 0{,}0123$

Binomialverteilung

$$\boxed{P(Y=y) = \binom{n}{y} \cdot p^y \cdot (1-p)^{n-y}}$$

$n = 4$ = Anzahl der Fragen 01.04.19

$p = P(x_1 = 1) = \frac{1}{3}$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{y}$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!}$$

$$= \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 4 \cdot 5}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1 \cdot 2} = 10$$

5 : 3 nCr =

5 nCr 3 =

$Y \sim B(n; p)$, d.h. Y ist binomialverteilt mit den Parametern n und p.

$E[Y] = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{3} = 1,\overline{3}$, d.h. im Mittel werden $1,\overline{3}$ Fragen richtig beantwortet. (Erwartungswert)

$Var[Y] = n \cdot p \cdot (1-p)$ Varianz = Maßzahl für die Streuung

Wenn liegt eine Binomialverteilung vor?

1.) Ja/Nein-Variable, d.h. bei jeder Wiederholung eines Zufallsexperiments interessiert nur, ob ein bestimmtes Ereignis A eintritt oder nicht

2) Die n Wiederholung sind stochastisch unabhängig voneinander

3) $p = P(A)$ ist bei jeder Wiederholung des Experiments gleich groß

Bsp: Im letzten Monat betrug der Prozentsatz von korrekt ausgefüllten Bestellungen beim Drive-Through Fenster eines Schnellrestaurants 91 %

Wie groß ist die Wkt., dass die nächsten

a) drei Bestellungen alle korrekt ausgefüllt sind?

b) dass bei den nächsten 10 Bestellungen genau eine falsch ausgefüllt ist?

c) dass von den nächsten 20 Bestellungen höchstens zwei falsch ausgefüllt sind?

X = Anzahl der korrekt ausgefüllten Bestellungen

$X \sim B(n; p = 0{,}91)$

zu a) $n = 3$

$$P(X=3) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}91^3 \cdot 0{,}09^0$$

S. 9.1

$$= 0{,}7536$$

zu b) $n = 10$

$$P(X=9) = \binom{10}{9} \cdot 0{,}91^{9} \cdot 0{,}09^{1}$$
$$= 0{,}3851$$

2. Lösungsweg:

Y = Anzahl der falsch Ausgestellten Bestellungen

$$P(Y=1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}09^{1} \cdot 0{,}91^{9}$$

$$Y \sim B(n=10;\ p=0{,}09)$$

zu c) $n = 20$

$$P(X \geq 18) = P(X=18) + P(X=19) + P(X=20)$$

korrekt	falsch
20	0
19	1
18	2

$$= \binom{20}{18} \cdot 0{,}91^{18} \cdot 0{,}09^{2}$$
$$+ \binom{20}{19} \cdot 0{,}91^{19} \cdot 0{,}09^{1}$$
$$+ \binom{20}{20} \cdot 0{,}91^{20} \cdot 0{,}09^{0}$$

$$= 0{,}1516 + 0{,}3 + 0{,}2818$$
$$= 0{,}7334$$