3.2 Unterjährige Verz.

Hauptaufgabe: Endkapital K_n berechnen, auf das ein Startkapital K_0 nach n Jahren bei p % Zinsen pro Jahr anwächst, wobei nach jeder Zinsperiode die angelaufenen Zinsen in der darauffolgenden Zinsperiode mitverzinst werden.

Dazu wird ein Jahr in m Zeitintervalle / Zinsperioden zerlegt:

$m = 360$ tägliche Verz.
$m = 12$ monatliche Verz.
$m = 4$ vierteljährliche Verz.
$m = 2$ halbjährliche Verz.

⚠ m gibt die Anzahl der Verz. pro Jahr an. Wird z.B. zwei Jahre lang monatlich verzinst, so beträgt $m = 12$. Wird z.B. fünf Jahre lang vierteljährlich verzinst, so beträgt $m = 4$.

3.2.1 Relativer Zinssatz

$\frac{i}{m}$ = unterjähriger relativer Zinssatz

Verzinsungsplan für K_1 = Guthaben a. E. des ersten Jahres:

Zinsperiode	Guthaben a. E. der Zinsperiode
1	$K_0 + K_0 \cdot \frac{i}{m} = K_0(1+\frac{i}{m})$
2	$K_0(1+\frac{i}{m}) + K_0(1+\frac{i}{m}) \cdot \frac{i}{m} = K_0(1+\frac{i}{m})^2$ Distributiv-Gesetz
3	$K_0(1+\frac{i}{m})^2 + K_0(1+\frac{i}{m})^2 \cdot \frac{i}{m} = K_0(1+\frac{i}{m})^3$
⋮	⋮
m	$K_1 = K_0(1+\frac{i}{m})^m$

Beispiel:

$i = 0{,}04 = 4\%$, $K_0 = 100$ €, $K_1 = ?$

a) halbjährliche Verz. zum relativen Zins

b) nachschüssige Verz.

zu a) $K_1 = 100(1+\frac{0{,}04}{2})^2 = 104{,}04$ €

zu b) $K_1 = 100 \cdot 1{,}04 = 104$ €; d.h. insb. sind die beiden Endguthaben unter Teilaufgabe a) und Teilaufgabe b) unterschiedlich.

Zusatzfrage: Welcher Jahreszins muss angesetzt werden, damit das Startkapital $K_0 = 100$ bei nachschüssiger Verz. dasselbe Endkapital wie unter Teilaufgabe a) erreicht?

$104{,}04 = 100 \cdot q \Leftrightarrow 1{,}0404 = q \Leftrightarrow i = 0{,}0404 = 4{,}04\%$

Zur Unterscheidung werden bei einer unterjährigen Verzinsung zum relativen Zins der Zins von 4% als nomineller Jahreszins bezeichnet und der Zins von 4,04% als effektiver Jahreszins. In der Formelsammlung ist $\bar{j}$ der effektive Jahreszinssatz. Er lässt sich wie folgt berechnen:

$$\underbrace{K_0(1+\bar{j})}_{\text{nachsch. Verz.}} = K_1 = \underbrace{K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^m}_{\text{unterj. Verz. zum relativen Zins}} \qquad |:K_0$$

$$1+\bar{j} = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m \iff \bar{j} = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m - 1 \qquad \text{F. 1.4}$$

Beispiel:

5% nomineller Jahreszins, Effektivzins = ? bei

a) vierteljährlichen Verz. zum relativen Zins

b) monatlichen Verz. zum relativen Zins

zu a) $\bar{j} = \left(1+\frac{0{,}05}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}05094534 = 5{,}094534\,\%$

zu b) $\bar{j} = \left(1+\frac{0{,}05}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}0511619 = 5{,}11619\%$

Insb. ist bei der unterjährigen Verz. zum relativen Zins der Effektivzins höher als der nominelle Jahreszins.

Allgemein beträgt das Endguthaben bei unterj. Verz. zum rel. Zins:

$$K_n = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\cdot m} \qquad \text{F. 1.4}$$

wobei $n \cdot m$ eine natürliche Zahl sein muss.

Beispiel:

2% nomineller Jahreszins, Startkapital 3000 €, vierteljährliche Verz. zum relativen Zins

a) Endguthaben nach 5 Jahren, 9 Monaten?

b) Endguthaben nach 5 Jahren, 10 Monaten?

c) Nach welchem Quartal überschreitet das Endguthaben erstmals den Wert von 3500 €?

zu a) $m=4$, d.h. alle drei Monate wird verzinst

$n = 5 + \frac{9}{12} = 5{,}75$ Jahre

Insb. gilt: $n \cdot m = 5{,}75 \cdot 4 = 23$ ist eine natürliche Zahl. Insgesamt wird 23-mal verzinst.

1. Lösungsweg:

$$K_{5{,}75} = 3000 \cdot \left(1+\frac{0{,}02}{4}\right)^{5{,}75\cdot 4} = 3364{,}66\ €$$

2. Lösungsweg:

$j = \left(1+\frac{0,02}{4}\right)^4 - 1 = 0,0201505 = 2,01505\%$ Effektivzins

$K_{5,75} = 3000 \cdot 1,021505^{5,75} = 3364,66$ €

zu b) Im der Laufzeit von 5 Jahren, 10 Monaten liegen 23 volle Quartale.

$K_{5+\frac{10}{12}} = K_{5+\frac{9}{12}} = 3364,66$ € (Insb. gibt es für den letzten der 10 Monate keine Zinsen, da nur alle drei Monate verzinst wird.)

zu c) 1. Lösungsweg:

$3500 = 3000 \cdot \left(1+\frac{0,02}{4}\right)^{n\cdot 4} \quad | : 3000$

$1,\overline{6} = 1,005^{4n}$

$4n = \log_{1,005} 1,\overline{6} = \frac{\ln 1,\overline{6}}{\ln 1,005}$ (vgl. Vorkurs W-Mathe)

$4n = 30,90715$ Quartale

d.h. 30 Quartale reichen nicht aus, d.h. nach 31 Quartalen wird erstmals der Betrag von 3500 € überschritten.

Probe: $3000\left(1+\frac{0,02}{4}\right)^{30} = 3484,20 < 3500$

$3000\left(1+\frac{0,02}{4}\right)^{31} = 3501,62 > 3500$

$31 = 4n \Leftrightarrow n = \frac{31}{4} = 7,75$ Jahre = 7 Jahre, 3 Quartale

2. Lösungsweg:

$j = 2,01505$ Effektivzins

$n = \frac{\ln \frac{3500}{3000}}{\ln 1,0201505} = 7,726787$ Jahre

$0,726787 \cdot 4 = 2,9$ Quartale

Aufrunden auf drei Quartale

$\Big\}$ 7 Jahre, 3 Quartale

Fazit: Soll bei einer unterjährigen Verz. zum relativen Zins eine Laufzeit n berechnet werden, so ergibt sich n aus der Laufzeitformel der nachschüssigen Verz. mit $q = 1+j$, wobei j den Effektivzins bezeichnet:

$$n = \frac{\ln \frac{K_n}{K_0}}{\ln q}$$

3.2.2 Konformer Zinssatz

$q^{1/m}$ = unterjähriger **konformer** Aufzinsungsfaktor

Im dem mit m Zinsperioden aufgeteilten Jahr wird am Ende einer jeden Zinsperiode mit dem Aufzinsungsfaktor $q^{\frac{1}{m}}$ verzinst. Das Guthaben nach einem Jahr ergibt sich wie folgt:

Zinsperiode	Guthaben am Ende der Zinsperiode
1	$K_0 (1+i)^{1/m}$
2	$K_0 (1+i)^{2/m}$
3	$K_0 (1+i)^{3/m}$
⋮	⋮
m	$K_1 = K_0 (1+i)^{m/m} = K_0 (1+i) = K_0 \cdot q$

Insbes. ist bei der konformen Verz. das Guthaben nach einem Jahr genauso hoch wie, d.h. konform mit dem Guthaben nach einem Jahr bei nachschüssiger Verz.

Beispiel:

$i = 0{,}04 = 4\%$, $K_0 = 100$ €, halbjährl. Verz. zum konformen Zins, $K_1 = ?$

$$K_1 = 100 \cdot 1{,}04^{1/2} \cdot 1{,}04^{1/2} = 100 \cdot 1{,}04 = 104 \text{ €}$$

Allgemein beträgt das Endguthaben bei unterjährigen Verz. zum konformen Zins:

$$K_n = K_0 \cdot \left(q^{1/m}\right)^{m \cdot n} = K_0 \cdot q^n \quad \text{F. 1.5}$$

wobei n·m eine natürliche Zahl sein muss.

Beispiel:

2% Jahreszins, Startkapital 3000 €, tägliche Verz. zum konformen Zins, Laufzeit = 8 Jahre, 5 Monate, 24 Tage; $K_n = ?$

$$n = 8 + \frac{5}{12} + \frac{24}{360} = 8{,}48\overline{3}$$

$$K_n = 3000 \cdot 1{,}02^{8{,}48\overline{3}} = 3548{,}78 \text{ €}$$

Für die nachschl. Verz. muss in der Formel $K_n = K_0 \cdot q^n$ die Laufzeit n eine natürliche Zahl sein. Für die konforme Verz. darf in der Formel $K_n = K_0 \cdot q^n$ die Laufzeit n eine nicht negative reelle Zahl sein.