Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

QM III

Zentraler Grenzwertsatz

Aufgabe 10.5
Ein Reiseveranstalter bietet für eine Flusskreuzfahrt drei unterschiedliche Tickets an. Der Gewinn des Reiseveranstalters hängt unter anderem von der Ticketart ab. Folgende Anteile sind aus Erfahrung bekannt:

- 50% der Gäste sind Frühbucher. Der Gewinn pro Frühbucher beträgt 5 GE.
- 30% der Gäste zahlen den Normalpreis, der einen Gewinn von 10 GE pro verkauften Ticket bringt.
- Der Rest der Gäste erhält ein ermäßigtes Ticket, das einen Gewinn von 2 GE pro verkauftem Ticket bringt.

a) Betrachten Sie die Zufallsvariable X=„Gewinn (in GE) pro Ticket“.

   1. Berechnen Sie den erwarteten Gewinn pro Ticket.
   2. Berechnen Sie die Varianz von X.

b) Wie hoch ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass bei 400 Gästen der Gesamtgewinn über 2 400 GE liegt?

c) Welcher Gewinn wird näherungsweise bei 400 Gästen mit der Wahrscheinlichkeit von 95% überschritten?

Aufgabe 10.6
Bei einem Automatenspiel beträgt der Einsatz pro Spiel ein Euro. Der Automat wirft bei einem Spiel aus

- zwei Euro mit der Wahrscheinlichkeit 0,3
- ein Euro mit der Wahrscheinlichkeit 0,2
- gar nichts mit der Wahrscheinlichkeit 0,5.

a) Wie groß ist der erwartete Gewinn bei 100 Spielen?

b) Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, bei 100 Spielen weniger als fünf Euro zu verlieren?

Aufgabe 10.7
Der Anteil der Bevölkerung, der die Hamburger Band „Fettes Brot“ kennt, beträgt 1%. An einer Betriebsweihnachtsfeier nehmen 1200 Personen teil. Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den Gästen

a) höchstens zehn Kenner der Band befinden?

b) weniger als zehn Kenner der Band befinden?

c) genau zehn Kenner der Band befinden?

Lösung zu Aufgabe 10.5:
X=Gewinn (in GE pro Ticket)

x	2	5	10
$P(X=x)$	0,2	0,5	0,3

a) 1. $E[X] = 2 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 0{,}3 = 5{,}9$

2. $V[X] = (2-5{,}9)^2 \cdot 0{,}2 + (5-5{,}9)^2 \cdot 0{,}5 + (10-5{,}9)^2 \cdot 0{,}3 = 8{,}49$

b) Faustregel für ZGWS: $n = 400 \geq 30$ ist erfüllt
$P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{400} > 2\,400) = 1 - P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{400} \leq 2\,400) \approx 1 - F_U\left(\frac{2\,400 - 400 \cdot 5{,}9}{\sqrt{400 \cdot 8{,}49}}\right) = 1 - F_U(0{,}6864) = 1 - 0{,}754 = 0{,}246$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 25%.

c) $0{,}05 = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{400} \leq x) = F_U\left(\frac{x - 400 \cdot 5{,}9}{\sqrt{400 \cdot 8{,}49}}\right)$
$\Leftrightarrow -1{,}6449 = \frac{x - 400 \cdot 5{,}9}{\sqrt{400 \cdot 8{,}49}} \Leftrightarrow x = 400 \cdot 5{,}9 - 1{,}6449 \cdot \sqrt{400 \cdot 8{,}49} = 2\,264{,}143$
d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt der Gewinn über etwa 2 264 GE.

Lösung zu Aufgabe 10.6:
X=Gewinn (in Euro) bei einem Spiel

Wkt.	0,5	0,2	0,3
Auswurf in Euro	0	1	2
Gewinn in Euro	-1	0	1

a) E$[X]$=$(-1) \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 = -0{,}2$
d.h. bei einem Spiel muss man mit einem Verlust von 20 Cent rechnen
d.h. bei 100 Spielen muss man mit einem Verlust von 20 Euro rechnen

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= (-1-(-0{,}2))^2 \cdot 0{,}5 + (0-(-0{,}2))^2 \cdot 0{,}2 + (1-(-0{,}2))^2 \cdot 0{,}3 \\ &= 0{,}64 \cdot 0{,}5 + 0{,}04 \cdot 0{,}2 + 1{,}44 \cdot 0{,}3 \\ &= 0{,}76\end{aligned}$$

b) X_i=Gewinn (in Euro) beim $i-$ten Spiel; $i = 1, \ldots, 100$
$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > -5\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq -5\right) \approx_{\text{ZGWS}} 1 - F_U\left(\frac{-5-(-20)}{\sqrt{100 \cdot 0{,}76}}\right) = 1 - F_U(1{,}7206) = 1 - 0{,}957 = 0{,}043$

Lösung zu Aufgabe 10.7:
Auswahlsatz $= \frac{1\,200}{82\,000\,000} \leq 0{,}05$
X= Anzahl der Kenner
$X \sim \mathsf{B}(n = 1200; p = 0{,}01)$
E$[X]$=np=12
Var$[X]$=$np(1-p) = 12 \cdot 0{,}99 = 11{,}88$

Da n groß ist, überprüfen wir noch die Faustregel für die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung:

$np = 12 \geq 10 \qquad$ o.k.

$n(1-p) = 1\,200 \cdot 0{,}99 = 1\,188 \geq 10 \qquad$ o.k.

a) $P(X \leq 10) \approx_{\text{ZGWS}} F_U\left(\dfrac{10 + 0{,}5 - 12}{\sqrt{11{,}88}}\right) = F_U(-0{,}4352) \approx 0{,}332$

Wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X \leq 10$ über die Binomialverteilung berechnet, so ergibt sich:
$P(X \leq 10) = 0{,}346$

b) $P(X < 10) = P(X \leq 9) \approx_{\text{ZGWS}} F_U\left(\dfrac{9 + 0{,}5 - 12}{\sqrt{11{,}88}}\right) = F_U(-0{,}7253) \approx 0{,}234$

Wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X \leq 9$ über die Binomialverteilung berechnet, so ergibt sich:
$P(X \leq 9) = 0{,}241$

c) $P(X = 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 9) \approx_{\text{ZGWS}} 0{,}332 - 0{,}234 = 0{,}098$

Wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X = 10$ über die Binomialverteilung berechnet, so ergibt sich:
$P(X = 10) = 0{,}105$

Die Wahrscheinlichkeiten sind so unterschiedlich, da die Binomialverteilung mit $p = 0{,}01$ eine schiefe Verteilung ist, die durch die symmetrische Normalverteilung angenähert werden soll.